

Назовём натуральное число «замечательным», если оно самое маленькое среди натуральных чисел с такой же, как у него, суммой цифр.

- а) Чему равна сумма цифр две тысячи пятнадцатого замечательного числа?  
б) Сколько существует двухзначных замечательных чисел?  
в) Какой порядковый номер замечательного числа 5999?  
г) Чему равна сумма всех четырёхзначных замечательных чисел?

## Решение

Перенумеруем замечательные числа в порядке возрастания  $a_1, a_2, a_3, \dots$  и докажем, что множество замечательных чисел совпадает с множеством чисел вида

$$\overbrace{a9\dots9}_k, \quad \text{где } a \in \{1, 2, \dots, 9\}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (*)$$

Очевидно, что каждое число вида (\*) является замечательным и для однозначных чисел ( $k = 0$ ) имеем

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad \dots, \quad a_9 = 9.$$

Пусть теперь  $k \geq 1$  и предположим, что существует замечательное число  $\overbrace{a\dots b\dots}_k$ , в котором  $b < 9$ . Тогда возможны два случая:

$$\text{если } a > 1, \text{ то } \overbrace{a'\dots b'\dots}_k < \overbrace{a\dots b\dots}_k, \quad \text{где } a' = a - 1, \quad b' = b + 1;$$

$$\text{если } a = 1, \text{ то } \overbrace{\dots b'\dots}_k < \overbrace{a\dots b\dots}_k, \quad \text{где } b' = b + 1.$$

То есть в любом случае найдётся меньшее число с той же суммой цифр, что противоречит предположению.

Числа вида (\*) естественным образом упорядочиваются, причём для любой соседней пары у большего числа сумма цифр на 1 больше, чем у меньшего (соседние пары, начиная с  $a_9$ , могут иметь вид либо  $\overbrace{9\dots9}_k, \overbrace{19\dots9}_k$ , либо  $\overbrace{a9\dots9}_k, \overbrace{a'9\dots9}_k$ , где  $1 \leq a < 9, a' = a + 1$ ). Таким образом, порядковый номер числа равен сумме цифр этого числа, т.е.

а) сумма цифр числа  $a_{2015}$  равна 2015, а

в)  $5999 = a_{32}$ , так как  $5 + 9 + 9 + 9 = 32$ .

Выпишем последовательность замечательных чисел в явном виде:

$$1, 2, \dots, 9, 19, 29, \dots, 99, 199, 299, \dots, 999, 1999, 2999, \dots, 9999, 19999, \dots$$

$$a_1, a_2, \dots, a_9, a_{10}, a_{11}, \dots, a_{18}, a_{19}, a_{20}, \dots, a_{27}, a_{28}, a_{29}, \dots, a_{36}, a_{37}, \dots$$

б) 9.

г)  $1999 + 2999 + 3999 + \dots + 9999 = 53991$ .

Ответ: а) 2015; б) 9; в) 32; г) 53991.