

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2^{2-2y^2} + (|x| - 2)^2 = 8 \\ 2^{1-y^2} + x = a \end{cases}$$

будет иметь ровно 1 решение

Решение.

Данная система инвариантна относительно замены пары $(x; y)$ на пару $(x; -y)$. Следовательно, данная система может иметь ровно одно решение, если $y = -y$, т. е. $y = 0$. При $y = 0$ система

примет вид: $\begin{cases} 4 + (|x| - 2)^2 = 8 \\ 2 + x = a \end{cases}$; $\begin{cases} (|x| - 2)^2 = 4 \\ 2 + x = a \end{cases}$; $\begin{cases} |x| - 2 = 2 \\ |x| - 2 = -2 \\ a = x + 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x = \pm 4 \\ x = 0 \\ a = x + 2 \end{cases}$, откуда $\begin{cases} a = -2 \\ a = 6 \\ a = 2 \end{cases}$ –

возможные значения a . Для каждого из найденных значений a определим количество решений

системы. Пусть $2^{1-y^2} = t$, где $t \in (0; 2]$. Данная система примет вид: $\begin{cases} t^2 + (|x| - 2)^2 = 8 \\ t + x = a \end{cases}$

1) При $a = -2$ имеем: $\begin{cases} t^2 + (|x| - 2)^2 = 8 \\ t + x = -2 \end{cases}$. Из второго уравнения $x = -t - 2 < 0$ и система

примет вид $\begin{cases} t^2 + (x + 2)^2 = 8 \\ t + x = -2 \end{cases}$, откуда $\begin{cases} x = -4 \\ t = 2 \end{cases}$. Если $t = 2$, то $2^{1-y^2} = 2$, $y = 0$ и $(-4; 0)$ –

единственное решение данной системы. Следовательно, $a = -2$ подходит.

2) При $a = 6$ имеем: $\begin{cases} t^2 + (|x| - 2)^2 = 8 \\ t + x = 6 \end{cases}$. Из второго уравнения $x = 6 - t > 0$ и система

примет вид $\begin{cases} t^2 + (x - 2)^2 = 8 \\ t + x = 6 \end{cases}$, откуда $\begin{cases} x = 4 \\ t = 2 \end{cases}$. Если $t = 2$, то $2^{1-y^2} = 2$, $y = 0$ и $(4; 0)$ –

единственное решение данной системы. Следовательно, $a = 6$ подходит.

3) При $a = 2$ имеем: $\begin{cases} t^2 + (|x| - 2)^2 = 8 \\ t + x = 2 \end{cases}$. Из второго уравнения $x = 2 - t \geq 0$ и система

примет вид $\begin{cases} t^2 + (x - 2)^2 = 8 \\ t + x = 2 \end{cases}$, откуда $\begin{cases} x = 0 \\ t = 2 \end{cases}$. Если $t = 2$, то $2^{1-y^2} = 2$, $y = 0$ и $(0; 0)$ –

единственное решение данной системы. Следовательно, $a = 2$ подходит.

Итог: условию задачи удовлетворяют значения $a \in \{\pm 2; 6\}$.

Ответ: $\pm 2; 6$.