18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2^{2-2y^2} + (|x|-2)^2 = 8, \\ 2^{1-y^2} + x = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Заметим, что если пара чисел (x_0, y_0) — решение системы, то пара $(x_0, -y_0)$ также ее решение. Поэтому $y = 0$ является необходимым условием единственности решения. При $y = 0$ система принимает вид

$$\begin{cases} (|x|-2)^2 = 4, \\ x + 2 = a; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = a - 2, \\ (|a-2|-2)^2 = 4; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = a-2, \\ \left[\begin{array}{l} |a-2| = 4, \\ |a-2| = 0, \end{array} \right. \end{cases}$$

откуда находим $a = \pm 2$ и $a = 6$. Проверим найденные значения a на достаточность.

Если $a = -2$, то система принимает вид

$$\begin{cases} t^2 + (|x|-2)^2 = 8, \\ t + x = -2, \end{cases}$$

где $t = 2^{1-y^2}$, $t \in (0; 2]$. Тогда, выражая из второго уравнения x и подставляя в первое уравнение системы, получим $t^2 + (|t+2|-2)^2 = 8$. Так как $t > 0$, модуль раскрывается однозначно: $2t^2 = 8$, откуда $t = 2$, и исходная система имеет единственное решение $(-4, 0)$.

При $a = 2$ приходим к уравнению $t^2 + (|2-t|-2)^2 = 8$. Так как $t \leqslant 2$, модуль раскрывается однозначно: $2t^2 = 8$, откуда $t = 2$, и исходная система также имеет единственное решение $(0, 0)$.

Наконец, при $a = 6$ имеем $t^2 + (|6-t|-2)^2 = 8$. Так как $t \leqslant 2$, уравнение перепишется в виде $t^2 + (4-t)^2 = 8$, или $2(t-2)^2 = 0$, откуда $t = 2$, и решением исходной системы будет пара $(4, 0)$.

Ответ: ± 2; 6.