18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2^{2-2y^2} + (|x|-2)^2 = 8 \\ 2^{1-y^2} + x = a \end{cases}$$

будет иметь ровно 1 решение

Решение.

Заметим, что система симметрична относительно знака переменной y (т. к. $(-y)^2 = y^2$), то есть, если пара (x_0, y_0) — решение системы, то пара $(x_0; -y_0)$ — также является решением этой системы $\Rightarrow$ система будет иметь единственное решение только в том случае, если $-y_0 = y_0$, т. е. $y_0 = 0$.

Подставим $y = 0$ (необходимое условие) в систему, она примет вид:

$$\begin{cases} 2^2 + (|x|-2)^2 = 8, \\ 2 + x = a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (|x|-2)^2 = 4 \\ x = a-2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (|a-2|-2)^2 = 4 \ (*), \\ x = a-2; \end{cases}$$

тогда из уравнения $(*)$ имеем:

$$(|a-2|-2)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |a-2|-2 = -2, \\ |a-2|-2 = 2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |a-2| = 0, \\ |a-2| = 4; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-2 = 0, \\ a-2 = -4, \\ a-2 = 4; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2, \\ a = -2, \\ a = 6. \end{array}\right.$$

Проверим каждое из полученных значений a.

Пусть $2^{1-y^2} = t, t > 0$, тогда $2^{2-2y^2} = \left(2^{1-y^2}\right)^2 = t^2$.

1) $a = -2$. Система примет вид: $\begin{cases} t^2 + (|x|-2)^2 = 8, \\ t + x = -2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2-x)^2 + (|x|-2)^2 = 8, \\ t = -2-x. \end{cases}$

Решим первое уравнение системы:

$$(x+2)^2 + (|x|-2)^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + x^2 - 4|x| + 4 = 8 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2|x| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ x^2 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x^2 + 4x = 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ x = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x(x+4) = 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ \begin{cases} x < 0, \\ x + 4 = 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -4. \end{array}\right.$$

При $x = 0$: $t = -2 < 0$, исходная система решений не имеет;

при $x = -4$: $t = -2 + 4 = 2$, $2^{1-y^2} = 2 \Leftrightarrow 1 - y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$.

Таким образом, при $a = -2$ система имеет единственное решение $(-4; 0)$, что соответствует условию задачи.

2) $a = 2$. Система примет вид: $\begin{cases} t^2 + (|x|-2)^2 = 8, \\ t + x = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-x)^2 + (|x|-2)^2 = 8, \\ t = 2-x. \end{cases}$

Решим первое уравнение системы:

$$(2-x)^2 + (|x|-2)^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + x^2 - 4|x| + 4 = 8 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2|x| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ x^2 - 4x = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x^2 = 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ x(x-4) = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x = 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x - 4 = 0; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 4. \end{array}\right.$$

При $x = 0$: $t = 2$, $y = 0$;

при $x = 4$: $t = 2 - 4 = -2 < 0$, исходная система решений не имеет.

Таким образом, при $a = 2$ система имеет единственное решение $(0; 0)$, что соответствует условию задачи.

1) $a = 6$. Система примет вид: $\begin{cases} t^2 + (|x|-2)^2 = 8, \\ t + x = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (6-x)^2 + (|x|-2)^2 = 8, \\ t = 6-x. \end{cases}$

Решим первое уравнение системы:

$$(6-x)^2 + (|x|-2)^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 + x^2 - 4|x| + 4 = 8 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 2|x| + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ x^2 - 8x + 16 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x^2 - 4x + 16 = 0 \ (**); \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ (x-4)^2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ x - 4 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = 4; \quad t = 2, \quad y = 0.$$

$(**)$ $D_1 = 4 - 16 = -12 < 0$, уравнение корней не имеет $\Rightarrow$ вторая система решений не имеет.

Таким образом, при $a = 6$ система имеет единственное решение $(4; 0)$, что соответствует условию задачи.

В ответ запишем все полученные значения a.

Ответ: $a \in \{-2; 2; 6\}$.