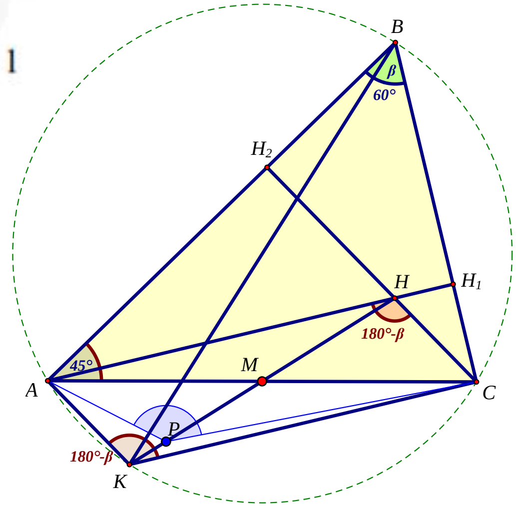
16. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AH_1 и CH_2, затем провели луч HM, который пересекает описанную около треугольника ABC в точке K, где M – середина AC, а H – точка пересечения высот.

А) Докажите, что HM=MK

Б) Найдите площадь треугольника BCK, если $\angle ABC = 60^0; \angle BAC = 45^0, AC = 1$



Решение.

а)Пусть $\angle ABC = \beta$. $AH_1 \perp BC, CH_2 \perp AB,$ тогда

$\angle H_1HH_2 = 180° - \beta = \angle AHC$. Предположим, что $HM \neq MK$

и $HM = MP$, где $P \in MK$. Тогда имеем: $AM = CM, HM = MP,$

следовательно, $AHCP$ – параллелограмм и $\angle APC = \angle AHC = 180° - \beta$

Но $ABCK$ – вписанный четырехугольник и $\angle AKC = 180° - \beta$, т. е.

$\angle AKC = \angle APC$, что невозможно. Следовательно, предположение $HM \neq MK$ неверно и $HM = MK$.

б) $AHCP$ – параллелограмм и $KC \parallel AH_1$; $AH_1 \perp BC$, следов., $KC \perp BC$ и BK – диаметр окружности.

По т. синусов $\dfrac{AC}{sin\beta} = 2R$, т. е. $BK = 2R = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $\angle BKC = \angle BAC = 45°$ – вписанные углы. Тогда

ΔBCK – прямоугольный, равнобедренный, $BC = CK = \dfrac{BK}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$ и $S_{BCK} = \dfrac{1}{2}BC^2 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\mathbf{\frac{1}{3}}$.