13. а) Решите уравнение $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]$

Решение. $\cos x\cos y=\dfrac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$

(а) Умножим обе части уравнения на 2 и применим формулу произведения косинусов:

$$2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-1 \ \Leftrightarrow\ \cos 2x+\cos\frac{2\pi}{3}=-1 \ \Leftrightarrow\ \cos 2x-\frac{1}{2}=-1 \ \Leftrightarrow\ \cos 2x=-\frac{1}{2} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z} \ \Leftrightarrow\ x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in\mathbb{Z}.$$

(б) Отбор корней $\in\left[-\frac{\pi}{2};2\pi\right]$ выполним с помощью двойного неравенства:

$$-\frac{\pi}{2}\le-\frac{\pi}{3}+\pi k\le 2\pi \ \Leftrightarrow\ -\frac{1}{2}\le-\frac{1}{3}+k\le 2 \ \Leftrightarrow\ -3\le-2+6k\le 12 \ \Leftrightarrow\ -1\le 6k\le 14 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ -\frac{1}{6}\le k\le\frac{7}{3}, k\in\mathbb{Z};\quad k=0, x=-\frac{\pi}{3};\quad k=1, x=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3};\quad k=2, x=-\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{5\pi}{3}.$$

$$-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{3}+\pi k\le 2\pi \ \Leftrightarrow\ -\frac{1}{2}\le\frac{1}{3}+k\le 2 \ \Leftrightarrow\ -3\le 2+6k\le 12 \ \Leftrightarrow\ -5\le 6k\le 10 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ -\frac{5}{6}\le k\le\frac{5}{3}, k\in\mathbb{Z};\quad k=0, x=\frac{\pi}{3};\quad k=1, x=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4\pi}{3}.$$

Ответ: (а) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$. (б) $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$.