Аня играет в игру: на доске написаны два различных натуральных числа a и b, оба меньше 1000. Если $\frac{3a+b}{4}$ и $\frac{a+3b}{4}$ оба натуральные, то Аня делает ход – заменяет этими двумя числами предыдущие. Если хотя бы одно из этих чисел не является натуральным, то игра прекращается.

а) Может ли игра продолжаться ровно три хода?

б) Существует ли два начальных числа таких, что игра будет продолжаться не менее 9 ходов?

в) Аня сделала первый ход в игре. Найдите наибольшее возможное отношение произведения полученных двух чисел к произведению предыдущих двух чисел.

Решение

Так как $a \neq b$, то пусть, например, $a > b$ и $a = b + c$. Тогда

$$3a + b \,\vdots\, 4 \quad \Longrightarrow \quad 3b + 3c + b \,\vdots\, 4 \quad \Longrightarrow \quad 3c \,\vdots\, 4 \quad \Longrightarrow \quad c \,\vdots\, 4.$$

Положим $c = 4k$, тогда $a = b + 4k$, где $b \geqslant 1$, $1 \leqslant k \leqslant 249$.

Обозначим пару, полученную из (a, b) после n ходов через (a_n, b_n). Заметим, что

$$a_1 + b_1 = \frac{3a+b}{4} + \frac{a+3b}{4} = a + b = 2a + 4k, \qquad a_1 - b_1 = \frac{a-b}{2} = 2k,$$

т.е. после каждого хода сумма двух чисел остаётся неизменной, а разность уменьшается вдвое.

Итак, чтобы пара (a, b) могла порождать следующие пары (a_1, b_1), (a_2, b_2), … , (a_n, b_n) необходимо, чтобы $a + b$ было чётным, а $a - b$ было кратно 4. Процесс после n ходов прервётся, когда $a_n - b_n$, оставаясь чётным, перестанет делиться на 4. Следовательно, минимально возможное значение для $a_n - b_n$ это 2.

б) Нет. Если предположить, что пара (a, b) порождает пары $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_9, b_9)$, то

$$a - b = 2^9(a_9 - b_9) \geqslant 2^{10} = 1024, \qquad \text{что недопустимо.}$$

а) Да. Построим трёхходовой пример. Берём чётное число, не кратное 4. Пусть это будет 10. Значит, $a - b = 2^3 \cdot 10 = 80$. Далее берём произвольное b, например, 11. Тогда $a = 11 + 80 = 91$ (при выборе чисел a и b нужно следить, чтобы они были меньше 1000). Легко проверить, что пара $(91, 11)$ позволит сделать лишь три хода:

$$(91, 11) \longrightarrow (71, 31) \longrightarrow (61, 41) \longrightarrow (56, 46).$$

в) Рассмотрим $$M = \frac{\frac{3a+b}{4} \cdot \frac{a+3b}{4}}{ab} = \frac{3a^2 + 10ab + 3b^2}{16ab} = \frac{3(b+4k)^2 + 10(b+4k)b + 3b^2}{16(b+4k)b} =$$

$$= \frac{b^2 + 4bk + 3k^2}{b^2 + 4bk} = 1 + \frac{3}{\left(\frac{b}{k}\right)^2 + 4\left(\frac{b}{k}\right)}.$$

M будет максимальным, когда $\frac{b}{k}$ минимально, т.е. $b = 1$, $k = 249$. В этом случае

$$M_{max} = \frac{b^2 + 4bk + 3k^2}{b^2 + 4bk} = \frac{1 + 4 \cdot 249 + 3 \cdot 249^2}{1 + 4 \cdot 249} = \frac{187000}{997}.$$

Такой результат дают пары $(997, 1) \longrightarrow (748, 250)$.

Ответ: **а)** Да; **б)** Нет; **в)** $\frac{187000}{997}$.