18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |y| + |2x - x^2| = 4, \\ y^2 + (2x - x^2)^2 = a^2 \end{cases}$$

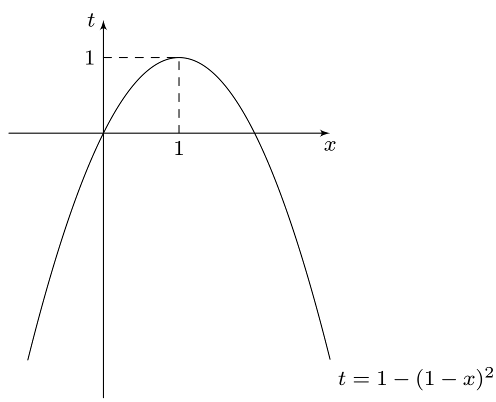
будет иметь ровно 8 решений.

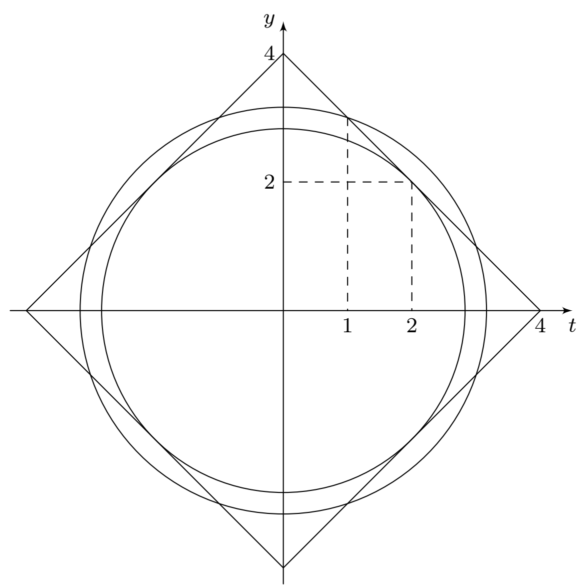
Решение.

Положив $t = 1 - (x-1)^2$, перепишем систему в виде

$$\begin{cases} |y| + |t| = 4, \\ y^2 + t^2 = a^2, \end{cases}$$

причем каждому значению $t < 1$ отвечает два значения x, $t = 1$ соответствует $x = 1$, при $t > 1$ решений нет.





На координатной плоскости (t, y) первое уравнение системы задает квадрат с вершинами в точках $(-4, 0)$, $(4, 0)$, $(0, -4)$, $(0, 4)$. Второе уравнение при $a \neq 0$ задает окружность с центром в точке $(0, 0)$ и радиусом $|a|$, при $a = 0$ окружность вырождается в точку $(0, 0)$, поэтому этот случай нам не подходит.

Из рисунка видно, что при $|a| < a_1$, где a_1 — значение радиуса, при котором окружность касается сторон квадрата, система не имеет решений; при $|a| = a_1$ система имеет 4 решения; при $a_1 < |a| < a_2$, где a_2 — значение радиуса, при котором окружность проходит через точку с абсциссой $t = 1$, система имеет 8 решений; при $|a| = a_2$ система имеет 10 решений; при $a_2 < |a| < 4$ система имеет 12 решений; при $|a| = 4$ система имеет 6 решений и, наконец, при $|a| > 4$ система не имеет решений. Найдем a_1 и a_2. Из симметрии картинки ясно, что окружность касается стороны квадрата в ее середине, а именно в точке $(2, 2)$. Подставляя эти значения в уравнение окружности, получаем $a^2 = 8$, откуда $a_1 = 2\sqrt{2}$. Значение a_2 найдем, подставив в уравнение окружности координаты точки $(1, 3)$: $a_2 = \sqrt{10}$. Итак, $2\sqrt{2} < |a| < \sqrt{10}$.

Ответ: $(-\sqrt{10}; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; \sqrt{10})$.