18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |y| + |2x - x^2| = 4 \\ y^2 + (2x - x^2)^2 = a^2 \end{cases}$$

будет иметь ровно 8 решений

Решение.

Пусть $|2x - x^2| = u \geq 0(*)$, $|y| = v \geq 0(**)$. Система примет вид: $\begin{cases} u + v = 4 \\ u^2 + v^2 = a^2 \end{cases}$ $(***)$.

Рассмотрим уравнение $(*)$при различных значениях u. Запишем его в виде: $|(x-1)^2 - 1| = u$;

$\left[\begin{array}{l} (x-1)^2 = u + 1 \\ (x-1)^2 = 1 - u \end{array}\right.$. Если $u = 0$, то получим $x_1 = 0, x_2 = 2$ — два значения для x. Если $u = 1$, то из первого уравнения получим два значения x, а из второго — одно. Следовательно, при $u = 1$ имеем три значения x. При $u > 1$ второе уравнение совокупности решений не имеет, а из первого получим два значения x. Следовательно, при $u > 1$ имеем два значения x. При $u \in (0; 1)$ каждое из уравнений совокупности имеет по два решения и они различны, т. е. при $u \in (0; 1)$ имеем четыре значения x. Для уравнения $(**)|y| = v$ при $v > 0$ получим два значения y, а при $v = 0$ только одно.

Решим систему $(*)$: $\begin{cases} v = 4 - u \\ 2u^2 - 8u + 16 - a^2 = 0 \end{cases}$; $\frac{D}{4} = 16 - 32 + 2a^2 = 2a^2 - 16$ и система имеет решения, если $2a^2 - 16 \geq 0$, т. е. $a^2 \geq 8$. При $a^2 = 8$ система $(*)$имеет одно решение $\begin{cases} u = 2 \\ v = 2 \end{cases}$. В этом случае данная система имеет 4 решения и $a = \pm 2\sqrt{2}$ не подходят.

При $a^2 > 8$ получим: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u_1 = 2 + \dfrac{\sqrt{2a^2 - 16}}{2} > 1 \\ v_1 = 2 - \dfrac{\sqrt{2a^2 - 16}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} u_2 = 2 - \dfrac{\sqrt{2a^2 - 16}}{2} \\ v_2 = 2 + \dfrac{\sqrt{2a^2 - 16}}{2} > 1 \end{cases} \end{array}\right.$ и данная система будет иметь 8 решений, если

$u_2 = 2 - \dfrac{\sqrt{2a^2 - 16}}{2} > 1$, т. е. $\sqrt{2a^2 - 16} < 2$; $\begin{cases} a^2 > 8 \\ 2a^2 - 16 < 4 \end{cases}$; $\begin{cases} a^2 > 8 \\ a^2 < 10 \end{cases}$, $a \in (-\sqrt{10}; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; \sqrt{10})$

Ответ: $\boldsymbol{(-\sqrt{10}; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; \sqrt{10})}$.