18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \left|\,|y|+\left|2x-x^2\right|\,\right| = 4 \\ y^2+\left(2x-x^2\right)^2 = a^2 \end{cases}$$

будет иметь ровно 8 решений

Решение.

Пусть $2x - x^2 = t\ (*)$, система примет вид: $\begin{cases} |y| + |t| = 4, \\ y^2 + t^2 = a^2. \end{cases}\ (**)$

Рассмотрим, сколько решений может иметь уравнение $(*)$.

Пусть $t(x) = 2x - x^2 = -(x^2 - 2x + 1) + 1 = -(x-1)^2 + 1, x \in \mathbb{R}$, графиком является парабола, ветви направлены вниз, тогда:

при $t < 1$ уравнение $(*)$ имеет 2 различных решения;

при $t = 1$ уравнение имеет ровно одно решение;

при $t > 1$ уравнение $(*)$, а, значит, и исходная система, решений не имеют.

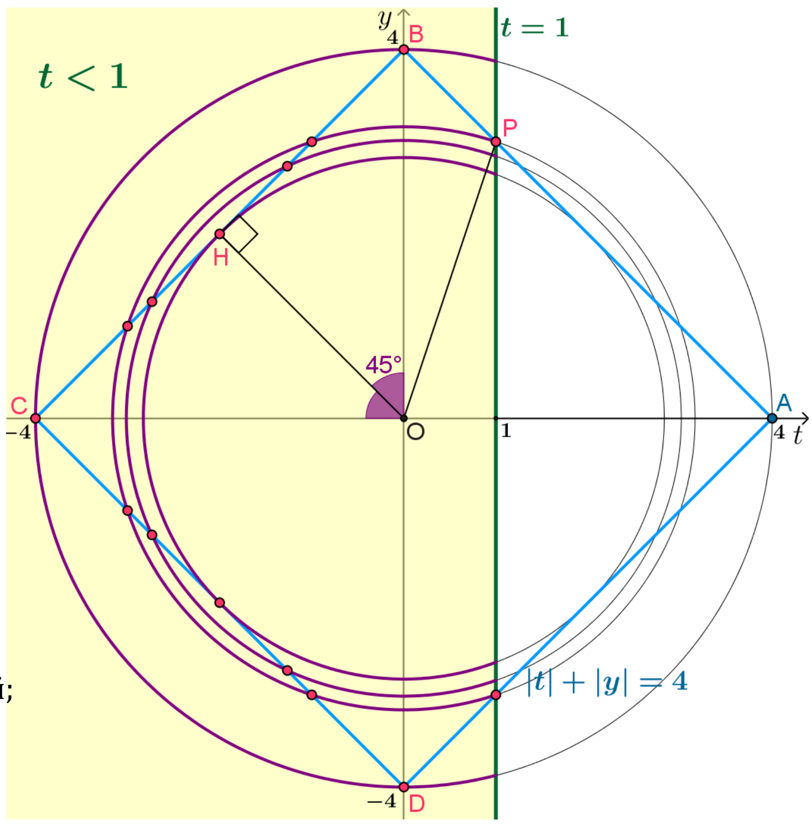
В левой части второго уравнения системы $(**)$ имеем сумму неотрицательных слагаемых, поэтому при $a = 0$ каждое из слагаемых равно нулю, т. е. $y = 0$ и $t = 0$, но в этом случае первое уравнение примет вид: $0 + 0 = 4, 0 = 4$ – неверно $\Rightarrow$ при $a = 0$ система решений не имеет, тогда $a \neq 0$.

Заметим, что система симметрична относительно смены знаков обеих переменных, т. е, если пара $(t_0; y_0)$ является решением системы, то решениями также будут пары $(-t_0; y_0), (-t_0; -y_0), (t_0; -y_0)$ (графики обоих уравнений симметричны относительно осей и начала координат).

Систему $(**)$решим графически в плоскости tOy.

1) Уравнение $|y| + |t| = 4$ задаёт квадрат с вершинами в точках $A(4; 0), B(0; 4), C(-4; 0), D(0; -4)$ (для его построения достаточно построить график в первой четверти: $y + t = 4$, $y = 4 - t$ и затем отобразить его симметрично относительно обеих осей и начала координат).

2) Уравнение $y^2 + t^2 = a^2$ при $a \neq 0$ задаёт окружность с центром в начале координат и радиусом, равным $\sqrt{a^2} = |a|$.



Каждая точка пересечения окружности со сторонами квадрата даёт 2 решения исходной системы, если она находится в выделенной жёлтым цветом области $(t < 1)$; ровно 1 решение, если она лежит на прямой $t = 1$ и ни одного решения, если она лежит в невыделенной области $(t > 1)$. Тогда:

при $\left[\begin{array}{l} |a| < OH, \\ |a| > 4; \end{array}\right.$ исходная система решений не имеет;

H – точка касания прямой BC и окружности; из прямоугольного ΔOBH:

$$OH = OB \cdot \cos 45° = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2};$$

при $|a| = 2\sqrt{2}$ система имеет 4 решения;

при $2\sqrt{2} < |a| < OP$ система имеет 8 решений;

P – точка пересечения прямых $t = 1$ и $y = 4 - t; y = 4 - 1 = 3;$ $P(1; 3)$,

$OP = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10};$

при $|a| = \sqrt{10}$ система имеет 10 решений;

при $\sqrt{10} < |a| < 4$ система имеет 12 решений;

при $|a| = 4$ система имеет 6 решений.

Таким образом, условие задачи выполняется при $a \in \left(-\sqrt{10}; -2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2};\ \sqrt{10}\right)$.

Ответ: $a \in \left(-\sqrt{10}; -2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2};\ \sqrt{10}\right)$.