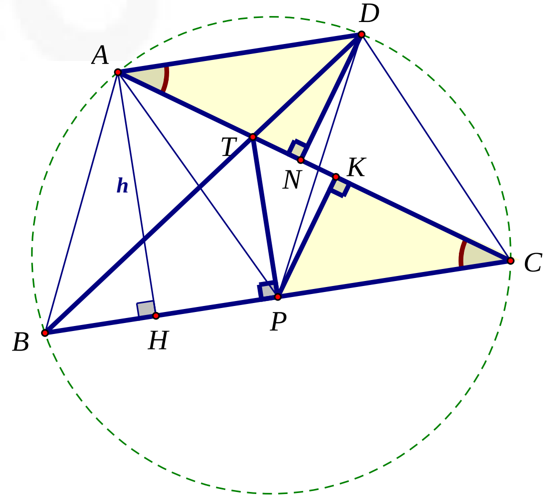
16. Хорды AC и BD пересекаются в точке T. На хорде BC отложен отрезок CP, равный AD. Точки P и D равноудалены от хорды AC, а отрезок TP перпендикулярен хорде BC.
А) Докажите, что площади четырехугольников ABPD и APCD равны.
Б) Найдите эти площади, если площадь треугольника ATD равна трем.



Решение.

а)Проведем $DN \perp AC$ и $PK \perp AC$. По условию $DN = PK, AD = CP$. Следовательно, $\Delta AND = \Delta CKP$ по катету и гипотенузе. Тогда $\angle NAD = \angle KCP$, а это накоест лежащие углы при прямых AD и BC и секущей AC. Следовательно, $AD \parallel BC$ и $ABCD$ — равнобедренная трапеция. TP — высота равнобедренного ΔBTC, следовательно, $BP = PC = AD$. $ABPD$ и $APCD$ — параллелограммы с общим основанием AD и общей высотой AH.

$S_{ABPD} = AD \cdot AH = S_{APCD}$, т. е. $S_{ABPD} = S_{APCD}$.

б)$\Delta BTC \sim \Delta\ ATD$ с $k = \dfrac{BC}{AD} = 2, S_{ATD} = 3$, следов., $S_{BTC} = 3k^2 = 12; \dfrac{BT}{TD} = 2$ и $S_{ATB} = S_{DTC} = 6$.

Тогда $S_{ABCD} = 27$. Пусть $AD = a, AH = h$. Тогда $BC = 2a$, $S_{ABCD} = \dfrac{3}{2}ah$ и $\dfrac{3}{2}ah = 27$, откуда $ah = 18$.

$S_{ABPD} = S_{APCD} = ah = 18$.

Ответ: **18**.