15. Решите неравенство: $5^{\log_3^2(x-2)^2}\cdot\dfrac{1}{125}\ge 5^{\log_3(x-2)}$

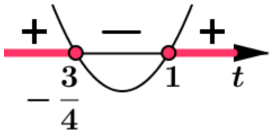
Решение.

$$5^{log_3^2(x-2)^2}\cdot\frac{1}{125}\ge 5^{\log_3(x-2)} \;\underset{(x-2>0)}{\Leftrightarrow}\; 5^{4log_3^2(x-2)}\cdot 5^{-3}\ge 5^{\log_3(x-2)} \;\Leftrightarrow\; 5^{4log_3^2(x-2)-3}\ge 5^{\log_3(x-2)} \;\underset{(y=5^t\text{ — возрастающая функция})}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\; 4log_3^2(x-2)-3\ge \log_3(x-2) \;\Leftrightarrow\; 4log_3^2(x-2)-\log_3(x-2)-3\ge 0.$$

Пусть $t=\log_3(x-2)$, неравенство примет вид: $4t^2-t-3\ge 0$.
Пусть $y(t)=4t^2-t-3$, графиком является парабола, ветви направлены вверх;

$$t_{1;2}=\frac{1\pm 7}{8}=\left\{-\frac{3}{4};1\right\};\quad y(t)\ge 0 \text{ при } \left[\begin{array}{l} t\le -\dfrac{3}{4}, \\ t\ge 1. \end{array}\right.$$



Вернёмся к переменной x ($y=\log_3 t$ — возрастающая функция):

$$\left[\begin{array}{l} \log_3(x-2)\le -\dfrac{3}{4}, \\ \log_3(x-2)\ge 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3(x-2)\le \log_3 3^{-\frac{3}{4}}, \\ \log_3(x-2)\ge \log_3 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x-2\le \dfrac{1}{\sqrt[4]{3^3}} \\ x-2\ge 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<x\le \dfrac{6+\sqrt[4]{3}}{3} \\ x\ge 5. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(2;\ \dfrac{6+\sqrt[4]{3}}{3}\right]\cup[5;+\infty)$.