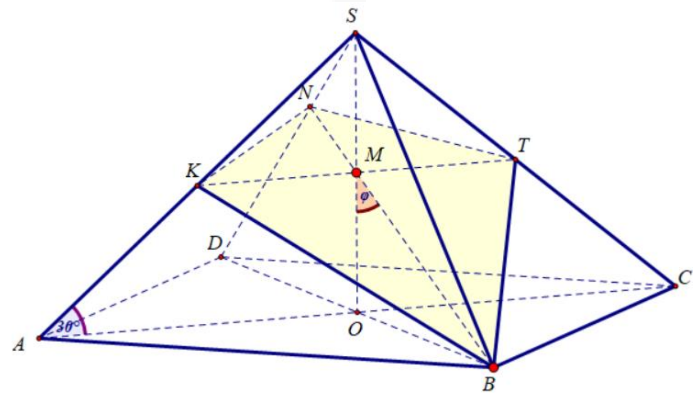
14. Дана правильная четырехугольная пирамида SABCD. Плоскость α параллельна прямой AC, проходит через точку B и середину высоты пирамиды.

А) Доказать, что плоскость α делит ребро SD в отношении 2 : 1, считая от точки D.

Б) Найдите синус угла между плоскостью α и плоскостью ASC, если угол SAC равен 30^0



Решение.

а)M — середина высоты SO; $\alpha \parallel AC$, следов.,

$\alpha \cap (ASC) = KT \parallel AC, M \in KT$.

$BM \subset (BSD), BM \cap SD = N$; $BKNT$ — сечение пирамиды плоскостью α . По т. Менелая для ΔDSO и прямой BN

$\frac{DN}{NS} \cdot \frac{SM}{MO} \cdot \frac{OB}{BD} = 1; \frac{DN}{NS} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1$, откуда $\frac{DN}{NS} = \frac{2}{1}$.

б)$\alpha \cap (ASC) = KT, MO \subset (ASC), MO \perp (ABC)$, следов., $MO \perp AC$; $KT \parallel AC$, следов., $MO \perp KT$.

$MB \subset \alpha, MB$ — наклонная, OB — её проекция на (ABC); $OB \perp AC$, т. к. $\perp$ $ABCD$ — квадрат, следов., по т. о трёх перпендикулярах $MB \perp AC$; $KT \parallel AC$, тогда $MB \perp KT$ и $\angle OMB = \varphi$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями α и ASC.

Пусть $AB = a$, тогда $OB = \frac{a}{\sqrt{2}} = AO$; $SO = AO \cdot tg30° = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}$; $MO = \frac{1}{2}SO = \frac{a}{2\sqrt{6}}$.

По т. Пифагора $MB = \sqrt{OB^2 + MO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{24}} = \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{6}}$; $sin\varphi = \frac{OB}{MB} = \frac{a}{\sqrt{2}} : \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{39}}{13}$.

Ответ: $\mathbf{\frac{2\sqrt{39}}{13}}$.