13. а) Решите уравнение $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{23\pi}{2}+x\right)\cdot\cos\left(\frac{17\pi}{2}+x\right)$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{2}\right)$

Решение.

(а) Применим формулы приведения: $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos^2 x$, $\sin\left(\frac{23\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos x$, $\cos\left(\frac{17\pi}{2}+x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$. Уравнение примет вид: $\cos^2 x=\sin x\cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x(\cos x-\sin x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos x-\sin x=0;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ tg\, x=1;\end{array}\right. \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z},\\ x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$

(б) Отбор корней выполним с помощью двойного неравенства:

$-\frac{3\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+\pi k<\frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{4}<\frac{1}{2}+k<\frac{5}{2} \Leftrightarrow -3<2+4k<10 \Leftrightarrow -5<4k<8 \Leftrightarrow -\frac{5}{4}<k<2$,

$k\in\mathbb{Z}$; $k=-1, x=\frac{\pi}{2}-\pi=-\frac{\pi}{2}$; $k=0, x=\frac{\pi}{2}$; $k=1, x=\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2}$.

$-\frac{3\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+\pi n<\frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{4}<\frac{1}{4}+n<\frac{5}{2} \Leftrightarrow -3<1+4n<10 \Leftrightarrow -4<4n<9 \Leftrightarrow -1<n<\frac{9}{4}$,

$n\in\mathbb{Z}$; $n=0, x=\frac{\pi}{4}$; $n=1, x=\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$; $n=2, x=\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{9\pi}{4}$.

Ответ: (а) $\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

(б) $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{4}$.