19. На доске написано 35 различных натуральных чисел, каждое из которых либо четное, либо его десятичная запись оканчивается на цифру 7. Сумма всех записанных на доске чисел равна 1135.

а) Может ли на доске быть ровно 31 четное число?

б) Могут ли ровно семь чисел на доске оканчиваться на 7?

в) Какое наибольшее количество чисел, оканчивающихся на 7, может быть на доске?

Решение.

а) Предположим, что на доске было 31 четное число. Тогда чисел, десятичная запись которых оканчивается на цифру 7, было 4. Значит, сумма всех записанных на доске чисел будет четной. Получили противоречие с тем, что их сумма равна 1135.

б) Да, если на доске написаны, например, числа 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 2, 4, 6, $\ldots$, 54, 120.

в) Заметим, что поскольку сумма всех записанных на доске чисел является нечетной, то на доске может быть записано нечетное количество чисел, десятичная запись которых оканчивается на цифру 7. Покажем, что на доске не может быть написано более десяти чисел, оканчивающихся на 7. Пусть на доске написано 11 чисел, оканчивающихся на 7, и 24 четных числа. Их минимальная возможная сумма $2+4+6+\ldots+48+7+17+27+\ldots+107=1227>1135$. Это противоречит тому, что сумма написанных чисел равна 1135. Значит, чисел, оканчивающихся на 7, меньше одиннадцати. Приведем пример девяти чисел, оканчивающихся на 7, и 26 четных чисел, сумма которых равна 1135: 7, 17, 27, $\ldots$, 87, 2, 4, 6, $\ldots$, 50, 62.

Ответ: а) нет; б) да; в) 9.