АлексЛарин-322, задача 19

На доске написано 35 различных натуральных чисел, каждое из которых либо чётное, либо его десятичная запись оканчивается на цифру 7. Сумма всех записанных на доске чисел равна 1135.
а) Может ли на доске быть ровно 31 чётное число?
б) Могут ли ровно семь чисел на доске оканчиваться на 7?
в) Какое наибольшее количество чисел, оканчивающихся на 7, может быть на доске?

Решение

а) Нет, т.к. сумма 31 чётного числа и 4 нечётных будет числом чётным.

в) Упорядочим по возрастанию, начиная с наименьшего, последовательность чисел с семёркой (для краткости так будем называть числа, десятичная запись которых оканчивается на цифру 7). Очевидно, это будет арифметическая прогрессия, заданная общим членом $a_n = 7 + (n-1)10$. Аналогично, чётные числа задаются прогрессией $b_k = 2 + (k-1)2$. Для сумм этих прогрессий справедливы формулы:

$$S_a(n) = a_1 + a_2 + \dots + a_n = n(5n+2),$$

$$S_b(k) = b_1 + b_2 + \dots + b_k = k(k+1).$$

Пусть n – наибольшее возможное число, для которого набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ (α_i – числа с семёркой, записанные по возрастанию, β_j – чётные числа, тоже по возрастанию, $n + k = 35$) обладает свойством, заданным в условии. Так как $a_i \leqslant \alpha_i$ и $b_j \leqslant \beta_j$ $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant k)$, то этим свойством будет обладать и набор чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_{k-1}, c$, где

$$c = \beta_k + (\alpha_1 - a_1) + (\alpha_2 - a_2) + \dots + (\alpha_n - a_n) + (\beta_1 - b_1) + (\beta_2 - b_2) + \dots + (\beta_{k-1} - b_{k-1}) =$$

$$= 1135 - (a_1 + a_2 + \dots + a_n + b_1 + b_2 + \dots + b_{k-1}) = b_k + \big(1135 - S_a(n) - S_b(k)\big).$$

Теперь понятно, как можно оценить n сверху. Для этого достаточно «работать» с прогрессиями:

$$\begin{cases} S_a(n) + S_b(k) \leqslant 1135 \\ n + k = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n(5n+2) + k(k+1) \leqslant 1135 \\ k = 35 - n \end{cases} \Rightarrow 6n^2 - 69n + 125 \leqslant 0 \Rightarrow$$

$$n \leqslant \frac{69 + \sqrt{1761}}{12} \approx 9{,}2$$

Построим пример для $n = 9$. Так как $S_a(9) + S_b(26) = 1125$, то последнее число $b_{26} = 52$ надо увеличить на $1135 - 1125 = 10$, и тогда набор таков:

$$a_1, a_2, \dots, a_9, b_1, b_2, \dots, b_{25}, 62 \quad \text{или в числах} \quad 7, 17, \dots, 87, 2, 4, \dots, 50, 62.$$

б) Построим пример для $n = 7$. Так как $S_a(7) + S_b(28) = 1071$, то последнее число $b_{28} = 56$ надо увеличить на $1135 - 1071 = 64$, и тогда набор таков:

$$a_1, a_2, \dots, a_7, b_1, b_2, \dots, b_{27}, 120 \quad \text{или в числах} \quad 7, 17, \dots, 67, 2, 4, \dots, 54, 120.$$

Ответ: **а)** Нет; **б)** Да; **в)** 9.

с форума alexlarin.com
mathlesson.ru