18. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$\sin^4 x + \cos^4 x > a \cdot \sin x \cdot \cos x$$

выполнено при любом значении x.

Решение.

Преобразуем левую часть неравенства:

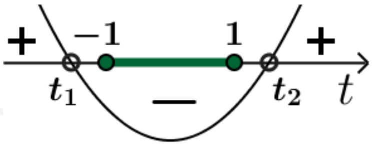
$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x - 2\sin^2 x\cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x =$$
$$= 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x.$$

Неравенство примет вид: $1 - 2\sin^2 x\cos^2 x > a \cdot \sin x \cdot \cos x \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad (2\sin x\cos x)^2 + a\,(2\sin x\cos x) - 2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 2x + a\sin 2x - 2 < 0.$$

Пусть $t = \sin 2x, x \in \mathbb{R}, |t| \le 1$. Неравенство примет вид: $t^2 + at - 2 < 0 \ (*)$.
Условие задачи выполняется, если для $\forall t \in [-1; 1]$ выполняется неравенство $(*)$.

Рассмотрим функцию $y(t) = t^2 + at - 2$, графиком является парабола; ветви направлены вверх; неравенство $(*)$ верно для $\forall t \in [-1; 1]$, если выполняются следующие условия:



$$\begin{cases} y(-1) < 0, \\ y(1) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - a - 2 < 0, \\ 1 + a - 2 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -1, \\ a < 1; \end{cases} \Leftrightarrow \ -1 < a < 1.$$

Ответ: $a \in (-1; 1)$.