18. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$\sin^4 x+\cos^4 x>a\cdot\sin x\cdot\cos x$$

выполнено при любом значении x.

Решение.

Преобразуем данное неравенство: $sin^4 x+2\,sin^2 x\,cos^2 x+cos^4 x>2\,sin^2 x\,cos^2 x+asinx\cdot cosx$;

$(\sin^2 x+\cos^2 x)^2>sinx\cdot cosx(2sinx\cdot cosx+a)$; $1>\frac{1}{2}sin2x(sin2x+a)$; $sin^2 2x+asin2x-2<0$.

Пусть $sin2x=t, t\in[-1;1]$. Неравенство примет вид: $t^2+at-2<0\ (*)$. Найдем значения a, при которых неравенство$(*)$выполняется для любого $t\in[-1;1]$. Рассмотрим функцию

$f(t)=t^2+at-2-$ квадратичная функция, график $-$ парабола, ветви которой направлены вверх.

Неравенство $f(t)<0$ будет выполняться для всех $t\in[-1;1]$, если $\begin{cases}f(-1)<0\\ f(1)<0\end{cases}$. Тогда имеем:

$\begin{cases}1-a-2<0\\ 1+a-2<0\end{cases}$; $\begin{cases}a>-1\\ a<1\end{cases}$, откуда $a\in(-1;1)$.

Ответ: $(\mathbf{-1};\mathbf{1})$.