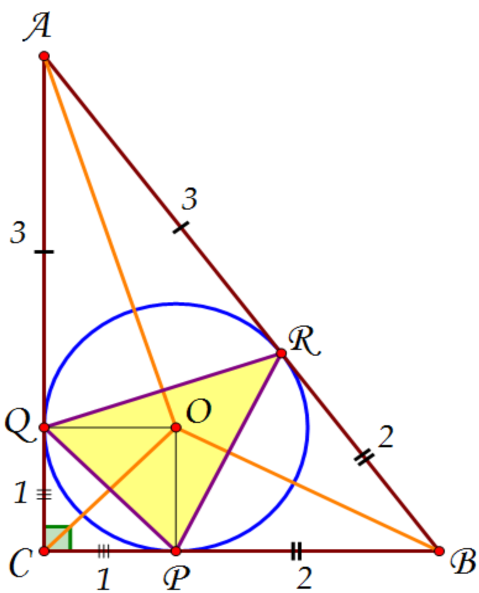
16_Ларин А.А._Тренировочный вариант № 322 _ЕГЭ_2021

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C вписана окружность с центром O, касающаяся его сторон BC, AC и AB в точках P, Q, R соответственно. Известны длины катетов: $AC = 4$, $BC = 3$.

а) Доказать, что $AO \cdot BO \cdot CO = 10$

б) Найдите площадь треугольника PQR.

Решение.



а) По теореме Пифагора:

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{16+9} = 5.$

Соединим отрезками точку O с вершинами треугольника, а также с точками касания катетов с окружностью.

По свойству касательной $OQ \perp AC$, $PO \perp BC$, $AQ = AR$, $CQ = CP$, $BP = BR$.

$CQ \parallel PO$ как два перпендикуляра к одной и той же прямой BC. Аналогично $PC \parallel OQ$, откуда $OPCQ$ – параллелограмм по определению.

В параллелограмме $OPCQ$ $\angle C = 90^\circ$, значит, $OPCQ$ – прямоугольник. В нем $CQ = CP$, откуда: $OPCQ$ – квадрат, $OQ = PO = r$, где r – радиус вписанной окружности.

$S(ABC) = 0,5AC \cdot BC = 2 \cdot 3 = 6.$

$p(ABC) = 0,5 \cdot (4+3+5) = 6.$ $r = S(ABC) : p(ABC) = 1.$

Очевидно, стороны квадрата $OPCQ$ равны 1. Значит, $AQ = AR = 3$, $BP = BR = 2.$

$AO = \sqrt{AQ^2 + OQ^2} = \sqrt{10};$ $BO = \sqrt{BP^2 + PO^2} = \sqrt{5};$ $CO = \sqrt{PQ^2 + PC^2} = \sqrt{2}.$

$AO \cdot BO \cdot CO = \sqrt{10 \cdot 5 \cdot 2} = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2} = 10,$ что и требовалось доказать.

б) Проведем отрезки PQ, RQ, PR. Заметим: $\sin B = \dfrac{AC}{AB} = 0,8;$ $\sin A = \dfrac{BC}{AB} = 0,6.$

$$S(PQR) = S(ABC) - S(PQC) - S(QAR) - S(PBR).$$

$$S(PQC) = 0,5. \quad S(QAR) = 0,5 \cdot AQ \cdot AR \cdot \sin A = 0,5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 0,6 = 2,7;$$

$$S(BPR) = 0,5 \cdot BP \cdot BR \cdot \sin B = 0,5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 0,8 = 1,6.$$

$$S(PQR) = 6 - (0,5 + 2,7 + 1,6) = 6 - 4,8 = 1,2.$$

О т в е т: 1,2.