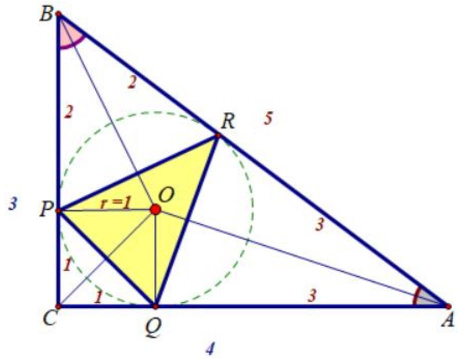
16. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C вписана окружность с центром O, касающаяся его сторон BC, AC и AB в точках P, Q, R соответственно. Известны длины катетов: AC = 4, BC = 3.

а) Доказать, что AO · BO · CO = 10

б) Найдите площадь треугольника PQR



Решение.

а)$AC = 4, BC = 3,$ следов.$, AB = 5.$ Пусть r − радиус вписанной окружности; $r = p - c,$ где p − полупериметр $\Delta ABC.$ Тогда $r = p - AB = = 6 - 5 = 1.$ $CPOQ$ − квадрат со стороной $r = 1;$ $CO = \sqrt{2}; QA = 3; BP = 2.$

Из прямоугольных треугольников OQA и OPB по т. Пифагора найдем $AO = \sqrt{10}, BO = \sqrt{5}$ и

$AO \cdot BO \cdot CO = \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = 10.$

б)$S_{PQR} = S_{ABC} - (S_{PCQ} + S_{QAR} + S_{PBR}).$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = 6; S_{PCQ} = \frac{1}{2}CQ^2 = 0,5; S_{QAR} = \frac{1}{2}AQ^2 sinA = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{3}{5} = 2,7; S_{PBQ} = \frac{1}{2} \cdot PB^2 \cdot sinB =$

$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{4}{5} = 1,6; S_{PQR} = 6 - (0,5 + 2,7 + 1,6) = 1,2.$

Ответ: **1**, **2**.