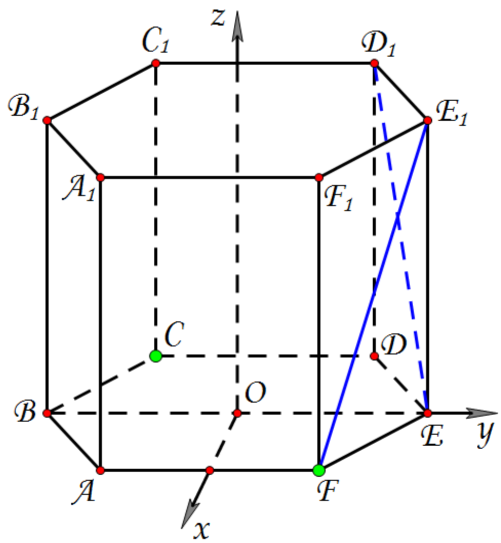
В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1.

а) Докажите, что точки F и C равноудалены от плоскости BED_1.

б) Найдите расстояние между прямыми ED_1 и FE_1.

Решение.



а) Введем декартову систему координат, как показано на рисунке. Имеем: $B(0;-1;0)$, $E(0;1;0)$, $E_1(0;1;1)$, $D_1\left(-\sqrt{3}/2;\ 1/2;\ 1\right)$, $F\left(\sqrt{3}/2;\ 1/2;\ 0\right)$, $C\left(-\sqrt{3}/2;\ -1/2;\ 0\right)$.

Составим уравнение плоскости BED_1, которую обозначим α. С этой целью решим систему уравнений.

$$\begin{pmatrix} B \\ D_1 \\ E \end{pmatrix}: \begin{cases} -b = d \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}a + \dfrac{1}{2}b + c = d \\ b = d \end{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (1)+(3):$$

$b = d = 0$. Найденные значения b и d подставим в уравнение (2). Получим: $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a + c = 0 \Leftrightarrow c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$. Если $a = 2$, то $c = \sqrt{3}$. Уравнение α: $2x + \sqrt{3}z = 0$. Искомые расстояния обозначим символом ρ. $\rho(F;\alpha) = \dfrac{\left|(\sqrt{3}/2)\cdot 2 + (1/2)\cdot 0 + 0\cdot\sqrt{3}\right|}{\sqrt{4+0+3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

$\rho(C;\alpha) = \dfrac{\left|(-\sqrt{3}/2)\cdot 2 + (-1/2)\cdot 0 + 0\cdot\sqrt{3}\right|}{\sqrt{4+0+3}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$. Итак, $\rho(F;\alpha) = \rho(C;\alpha)$.

б) Прямые ED_1 и FE_1 скрещиваются. Коли это так, они имеют единственный общий перпендикуляр, направляющий вектор которого пусть: $\vec{n}\{x;y;z\}$. Тогда: $\begin{cases} \overrightarrow{FE_1}\cdot\vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{ED_1}\cdot\vec{n} = 0 \end{cases}$.

$$\overrightarrow{FE_1}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1\right\},\ \overrightarrow{ED_1}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};1\right\}.\ \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y + z = 0 \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}x + y + 2z = 0 & (1) \\ -\sqrt{3}x - y + 2z = 0 & (2) \end{cases}$$

(1)+(2): $-2\sqrt{3}x + 4z = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$. Если $x = 2$, то: $z = \sqrt{3}$. Известно: $-\sqrt{3}x + y + 2z = 0$.

Тогда: $-2\sqrt{3} + y + 2\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Таким образом, $\vec{n}\left\{2;0;\sqrt{3}\right\}$.

На прямой ED_1 выберем точку E, на прямой FE_1 – точку E_1. $\overrightarrow{EE_1}\{0;0;1\}$.

$\rho(ED_1;FE_1) = |\,Пр_{\vec{n}}\overrightarrow{EE_1}| = \dfrac{\left|\overrightarrow{EE_1}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|} = \dfrac{\left|0\cdot 2 + 0\cdot 0 + 1\cdot\sqrt{3}\right|}{\sqrt{4+0+3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$. О т в е т: $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.