18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (2-5a)x + 4a^2 - 2a \leqslant 0, \\ x^2 + a^2 = 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение.

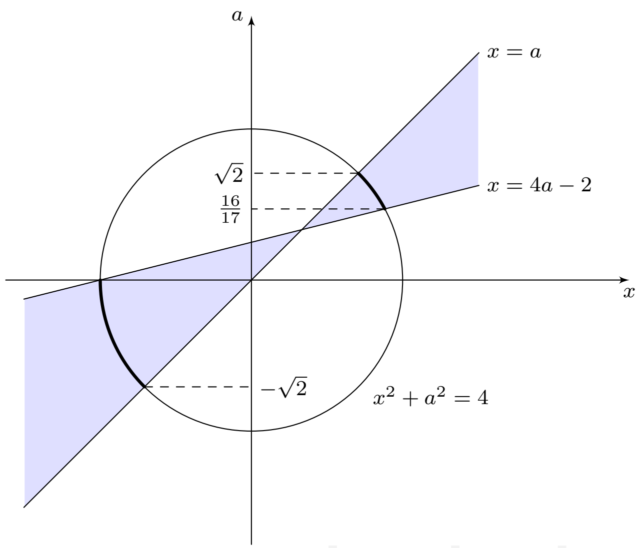
Изобразим на координатной плоскости xOa множества всех точек $(x; a)$, значения координаты и параметра каждой из которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (x-a)(x-4a+2) \leqslant 0, \\ x^2 + a^2 = 4. \end{cases}$$

Решая системы уравнений

$$\begin{cases} x = a, \\ x^2 + a^2 = 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4a - 2, \\ x^2 + a^2 = 4, \end{cases}$$

находим точки пересечения прямых $x = a$ и $x = 4a - 2$ с окружностью $x^2 + a^2 = 4$.



Тогда решение исходной системы представляет собой дуги этой окружности, находящиеся внутри области, являющейся решением неравенства $(x-a)(x-4a+2) \leqslant 0$.

Ответ: $[-\sqrt{2}; 0] \cup \left[\frac{16}{17}; \sqrt{2}\,\right]$.