Найдите все значения параметра $a$ при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+(2-5a)x+4a^2-2a\le 0 \\ x^2+a^2=4 \end{cases}$$

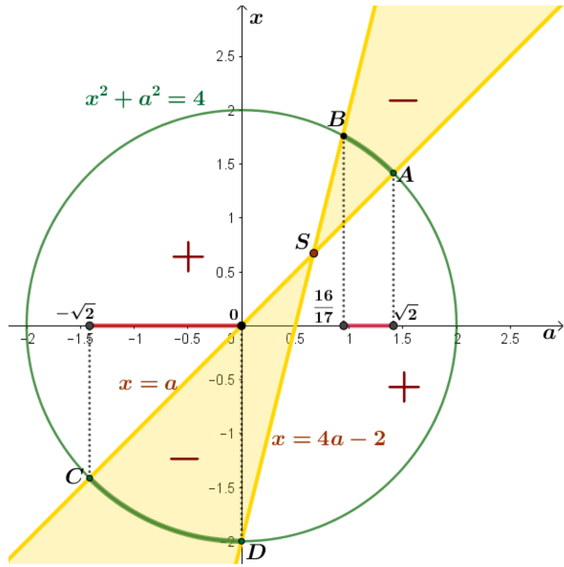
имеет хотя бы одно решение.

**Решение.**

Разложив левую часть неравенства, входящего в систему, на множители получим:

$\begin{cases}(x-a)\big(x-(4a-2)\big)\le 0 \\ x^2+a^2=4\end{cases}$. Решим систему графически в системе координат $xOa$.

Прямые $x=a$ и $x=4a-2$ разбивают всю плоскость на 4 области. В каждой области функция $f(a,x)=(x-a)\big(x-(4a-2)\big)$ сохраняет знак. Графиком неравенства системы являются области, выделенные желтым цветом. Графиком уравнения системы является окружность с центром $O(0;0)$, радиус которой равен 2. Тогда решением системы являются координаты точек, расположенных на дугах $AB$ и $CD$ окружности. Абсциссы точек $A$ и $C$ найдем решив систему : $\begin{cases}x^2+a^2=4 \\ x=a\end{cases}$; $2a^2=4$; $a=\pm\sqrt{2}$.




Абсциссы точек $B$ и $D$ найдем решив систему : $\begin{cases}x^2+a^2=4 \\ x=4a-2\end{cases}$;

$16a^2-16a+4+a^2=4$; $17a^2-16a=0$; $a(17a-16)=0$; $\left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=\dfrac{16}{17}\end{array}\right.$

Данная система будет иметь хотя бы одно решение при

$a\in\left[-\sqrt{2};0\right]\cup\left[\frac{16}{17};\sqrt{2}\right]$.



Ответ: $\left[-\sqrt{2};\mathbf{0}\right]\cup\left[\mathbf{\frac{16}{17}};\sqrt{2}\right]$.