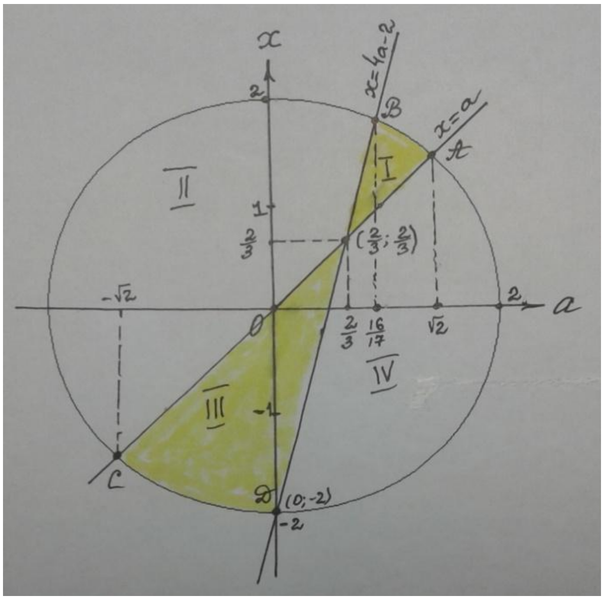
Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2-(2-5a)x+4a^2-2a\le 0 \\ x^2+a^2=4 \end{cases}$$ имеет хотя бы одно решение.



Решение:

Рассмотрим заданную систему в координатно-параметрической плоскости aOx.

1. Преобразуем неравенство:

$x^2+(2-5a)x+4a^2-2a\le 0 \iff$

$\iff x^2-(a+(4a-2))x+a\cdot(4a-2)\le 0.$ По теореме Виета: $(x-(4a-2))\cdot(x-a)\le 0$ (*)

Имеем уравнения двух прямых:

$x=4a-2$ и $x=a.$

2. Найдем точку пересечения этих прямых. Прямая $x=a$ – биссектриса первого и третьего координатных углов. $4a-2=a \iff a=2/3.$

Очевидно при этом также верно равенство $x=2/3.$ Прямая $x=4a-2$ при $a=0$ будет иметь ординату, равную $-2.$

3. Прямые $x=4a-2$ и $x=a$ разбивают координатную плоскость на 4 области, в каждой из которых квадратный трехчлен $(x-a)\cdot(x-(4a-2))$ имеет постоянный знак. Пронумеруем названные области римскими цифрами I,II,III,IV.

Найдем знак квадратного трехчлена в области I , которой принадлежит точка $\left(1;\dfrac{4}{3}\right)$.

$\left(\dfrac{4}{3}-1\right)\cdot\left(\dfrac{4}{3}-(4-2)\right)=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{4}{3}-2\right)=\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{2}{4}\right)<0.$ Далее при переходе из одной области к другой произойдет чередование знаков. Значит, следующей искомой областью будет область III.

4. Уравнение $x^2+a^2=4$ есть уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом, равным 2. Проведем ее в рассматриваемой плоскости. Точки пересечения прямых $x=a,$ $x=4a-2$ и проведенной окружности обозначим буквами A, B, C и $D,$ как показано на рисунке. Найдем абсциссы этих точек

Точки A: в уравнении $x^2+a^2=4$ при $x=a$ $2a^2=4;$ $a^2=2;$ $a_A=2.$ Точка C ей симметрична относительно начала координат, значит, $a_C=-2.$

Найдем абсциссу точки $B.$ Для этого достаточно решить уравнения $x=4a-2$ и $x^2+a^2=4$ в одной системе и относительно $a.$

$(4a-2)^2+a^2=4 \iff 16a^2-16a+4+a^2=4 \iff 17a^2-16a=0 \iff a(17a-16)=0 \iff$

$\iff \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=16/17 \end{array}\right.$. Итак, $a_B=\dfrac{16}{17}.$ Тогда: $a_D=0$. Искомые значения параметра a – суть абсцисс точек, принадлежащих замкнутым дугам: AB и $CD.$ Таким образом,

$a\in\left[-\sqrt{2};0\right]\cup\left[\dfrac{16}{17};2\right]$

О т в е т: $a\in\left[-\sqrt{2};0\right]\cup\left[\dfrac{16}{17};2\right].$