15. Решите неравенство: $\dfrac{\log_{2x-1}^2\left(9x^2-12x+4\right)-10\log_{2x-1}\left(3x-2\right)+18}{3\log_{2x-1}\left(6x^2-7x+2\right)-2}\le 2$

Решение.

Ограничения на x: $\begin{cases}2x-1>0\\2x-1\ne 1\\3x-2>0\end{cases}$, откуда $x\in\left(\dfrac{2}{3};1\right)\cup(1;+\infty)$. Преобразуем данное неравенство:

$$\frac{\log_{2x-1}^2(3x-2)^2-10\log_{2x-1}(3x-2)+18}{3\log_{2x-1}(3x-2)(2x-1)-2}-2\le 0;$$

$$\frac{4\log_{2x-1}^2(3x-2)-10\log_{2x-1}(3x-2)+18}{3\log_{2x-1}(3x-2)+3-2}-2\le 0;$$

$$\frac{2\log_{2x-1}^2(3x-2)-5\log_{2x-1}(3x-2)+9}{3\log_{2x-1}(3x-2)+1}-1\le 0.$$

Пусть $\log_{2x-1}(3x-2)=t$. Тогда неравенство примет вид: $\dfrac{2t^2-5t+9}{3t+1}-1\le 0;$ $\dfrac{2t^2-8t+8}{3t+1}\le 0;$

$\dfrac{t^2-4t+4}{3t+1}\le 0;$ $\dfrac{(t-2)^2}{3t+1}\le 0$, откуда $\left[\begin{array}{l}t=2\\t<-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$.

1)При $t=2$ имеем: $\log_{2x-1}(3x-2)=2$. Так как $x\in\left(\dfrac{2}{3};1\right)\cup(1;+\infty)$, то $3x-2=4x^2-4x+1;$

$4x^2-7x+3=0,$ $\left[\begin{array}{l}x=1 - \text{посторонний корень.}\\x=\dfrac{3}{4}\end{array}\right.$, т.е. $x=\dfrac{3}{4}$.

2)При $t<-\dfrac{1}{3}$ имеем: $\log_{2x-1}(3x-2)<-\dfrac{1}{3}$. Если $x\in\left(\dfrac{2}{3};1\right)$, то $0<2x-1<1, 0<3x-2<1$ и $\log_{2x-1}(3x-2)>0$. Если $x>1$, то $2x-1>1, 3x-2>1$ и $\log_{2x-1}(3x-2)>0$. Следовательно, при $x\in\left(\dfrac{2}{3};1\right)\cup(1;+\infty)$ неравенство $\log_{2x-1}(3x-2)<-\dfrac{1}{3}$ решений не имеет.

с форума alexlarin.com

Ответ: $\dfrac{3}{4}$.

mathlesson.ru