Решите неравенство $\dfrac{\log^2_{2x-1}(9x^2-12x+4)-10\log_{2x-1}(3x-2)+18}{3\cdot\log_{2x-1}(6x^2-7x+2)-2}\le 2.$.

Решение.

Найдем ограничения на x.

$$\begin{cases} 9x^2-12x+4>0 \\ 3x-2>0 \\ 2x-1>0 \\ 2x-1\ne 1 \\ 6x^2-7x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-2)^2>0 \\ 3x-2>0 \\ x>\dfrac{1}{2} \\ x\ne 1 \\ \left[\begin{array}{l} x<\dfrac{7-\sqrt{49-48}}{12} \\ x>\dfrac{7+1}{12} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{2}{3} \\ x\ne 1 \\ \left[\begin{array}{l} x<1/2 \\ x>2/3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(\frac{2}{3};1\right)\cup(1;+\infty).$$

Далее мы будем рассматривать исходное неравенство исключительно на множестве $M=\left(\dfrac{2}{3};1\right)\cup(1;+\infty)$. Корни квадратного трехчлена $6x^2-7x+2$ были найдены ранее: $x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_2=\dfrac{2}{3}$. Значит, $6x^2-7x+2=6\left(x-\dfrac{2}{3}\right)\cdot\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=(3x-2)\cdot(2x-1)$.

На M: $\dfrac{4\cdot\log^2_{2x-1}(3x-2)-10\cdot\log_{2x-1}(3x-2)+18}{3\cdot\log_{2x-1}(3x-2)+3\cdot\log_{2x-1}(2x-1)-2}\le 2$. Пусть $\log_{2x-1}(3x-2)=t$. Тогда:

$$\frac{4t^2-10t+18}{3t+3-2}\le 2 \Leftrightarrow \frac{2t^2-5t+9}{3t+1}-1\le 0 \Leftrightarrow \frac{2t^2-5t+9-3t-1}{3t+1}\le 0 \Leftrightarrow \frac{2t^2-8t+8}{3t+1}\le 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \dfrac{t^2-4t+4}{3t+1}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{(t-2)^2}{3t+1}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-2=0 \\ 3t+1<0 \end{array}\right.$. Перейдем к переменной x.

$$\left[\begin{array}{l} \log_{2x-1}(3x-2)-\log_{2x-1}(2x-1)^2=0 \\ 3\cdot\log_{2x-1}(3x-2)+1<0 \end{array}\right.$$

$\log_{2x-1}(3x-2)-\log_{2x-1}(2x-1)^2=0 \Leftrightarrow (2x-1-1)(3x-2-4x^2+4x-1)=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x-1)\cdot(4x^2-7x+3)=0$. На M $x\ne 1$.

Следовательно, мы правы разделить обе части последнего уравнения на $(x-1)$.

$4x^2-7x+3=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\dfrac{7\pm\sqrt{49-48}}{8}=\dfrac{7\pm 1}{8}$; $x_1=\dfrac{3}{4}$; $x_2=1-$ (корень посторонний).

Покажем, что неравенство $\log_{2x-1}(3x-2)>0$ выполняется для любого $x\in M$.
$\log_{2x-1}(3x-2)>0 \Leftrightarrow \log_{2x-1}(3x-2)-\log_{2x-1}1>0 \Leftrightarrow (2x-1-1)\cdot(3x-2-1)>0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x-1)\cdot(x-1)>0 \Leftrightarrow (x-1)^2>0$. Последнее неравенство истинно для любого действительного $x\ne 1$.

Следовательно неравенство $3\cdot\log_{2x-1}(3x-2)+1<0$ невозможно ни при каких $x\in R$..

Ответ: $\dfrac{3}{4}$.