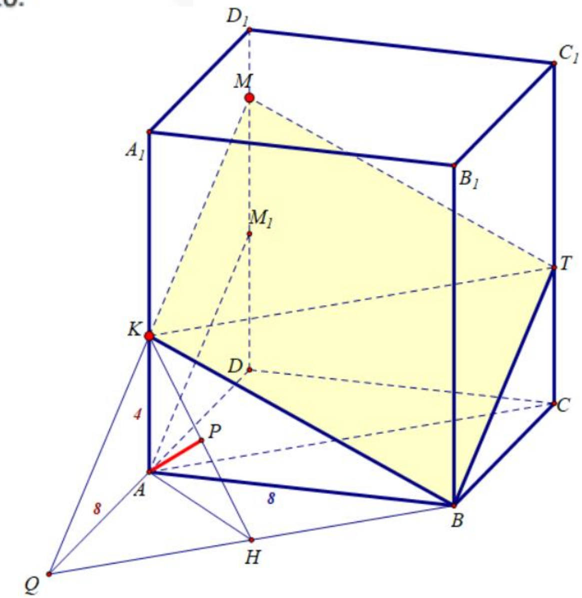
14. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на боковых ребрах AA_1 и DD_1 взяты соответственно точки K и M так, что $AK : A_1K = 2 : 3$, $DM : D_1M = 4 : 1$.

а) Докажите, что плоскость BMK параллельна прямой AC.

б) Найдите расстояние от точки A до плоскости BMK, если $AB = 8$, $AA_1 = 10$.



Решение.

а) $(BMK) \cap (ADD_1) = KM$; $(BCC_1) \parallel (ADD_1)$, следовательно, $(BMK) \cap (BCC_1) = BT \parallel KM$. Проведем $AM_1 \parallel KM$.

$DM = \dfrac{4}{5}DD_1, MM_1 = AK = \dfrac{2}{5}DD_1$, тогда $DM_1 = \dfrac{2}{5}DD_1 = AK$

$BT \parallel KM \parallel AM_1$, т. е. $BT \parallel AM_1$; $\angle M_1AD = \angle TBC$ – острые углы с соответственно параллельными сторонами, $AD = BC$ и $\Delta ADM_1 = \Delta BCT$ по катету и острому углу. Тогда $CT = DM_1 = AK$, $AKTC$ – прямоугольник и $KT \parallel AC$. $KT \subset (BMK)$, следов., $AC \parallel (BMK)$.

б) $(BMK) \cap (ABC) = QB$; $DM_1 = M_1M = 4$, $AM_1 \parallel QM$. По т. Фалеса $AQ = AD = 8$ и ΔQAB – прямоугольный, равнобедренный. Пусть H – середина QB, тогда по свойству равнобедренного треугольника $AH \perp QB$. Имеем: $QB \perp AH, QB \perp AK$, следов., $QB \perp (KAH)$

В ΔKAH проведем $AP \perp KH$. Тогда $AP \perp KH, AP \perp QB$, т. е. $AP \perp (BMK)$ и $AP = \dfrac{AK \cdot AH}{KH}$ – искомое расстояние. $AH = \dfrac{1}{2}QB = 4\sqrt{2}; KH = \sqrt{AK^2 + AH^2} = \sqrt{16 + 32} = 4\sqrt{3}; AP = \dfrac{4 \cdot 4\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\mathbf{\dfrac{4\sqrt{6}}{3}}$.