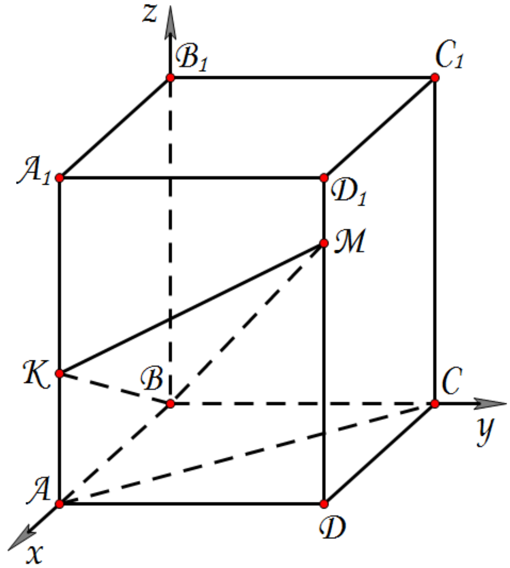
В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на боковых ребрах AA_1 и DD_1 взяты соответственно точки K и M так, что $AK : A_1K = 2 : 3$, $DM : D_1M = 4 : 1$.

а) Докажите, что плоскость BMK параллельна прямой AC.

б) Найдите расстояние от точки A до плоскости BMK, если $AB = 8$, $AA_1 = 10$.

Решение.



Поместим заданную призму в прямоугольную декартову систему координат так, как показано на рисунке.

Пусть стороны основания призмы равны m, высота - $5h$. Имеем: $B(0;0;0)$, $K(m;0;2h)$, $M(m;m;4h)$, $A(m;0;0)$, $C(0;m;0)$.

Будем искать уравнение плоскости BMK (обозначим ее α). Оно (уравнение) имеет вид: $ax+by+cz+d=0$.

Поскольку плоскость проходит через начало координат, то $d=0$ заведомо.

$\begin{cases} ma+2hc=0 \\ ma+mb+4hc=0 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 2. \end{pmatrix}$ Из (1): $a=-\dfrac{2hc}{m}$. При этом уравнение (2) примет вид:

$$-\frac{2hc}{m}\cdot m+mb+4hc=0 \iff mb+2hc=0 \iff b=-\frac{2hc}{m}.$$

Если $c=-m$, то: $a=2h$, $b=2h$, Уравнение α: $2hx+2hy-mz=0$. Нормальный вектор: $\vec{n}\{2h;2h;-m\}$. $\overrightarrow{AC}\{-m;m;0\}$.

Прямая AC будет параллельной, если будет выполнено равенство: $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. Проверим. $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2h\cdot(-m)+2h\cdot m-m\cdot 0=0$. Итак, требуемое равенство выполнено.

б) По условию $m=8$, $5h=10 \iff h=2$. Тогда уравнение α принимает вид: $4x+4y-8z=0 \iff x+y-2z=0$. $\vec{n}\{1;1;-2\}$. $A(8;0;0)$.

Если искомое расстояние обозначить ρ, то: $\rho=\dfrac{|1\cdot 8+1\cdot 0-2\cdot 0+0|}{\sqrt{1+1+4}}=\dfrac{8}{\sqrt{6}}$.

Ответ: б) $\dfrac{8}{\sqrt{6}}$.