а) Решите уравнение $\sqrt{\cos 2x - \sin^3 x + 3} = \sin x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(\frac{73\pi}{2}; 41\pi\right]$.

Решение.

а) $\sqrt{\cos 2x - \sin^3 x + 3} = \sin x \iff \sqrt{1 - 2\sin^2 x - \sin^3 x + 3} = \sin x$.

Пусть $\sin x = t$. В контексте заданного уравнения: $0 \le t \le 1$. Тогда:

$$\begin{cases} t \ge 0 \\ \sqrt{4 - 2t^2 - t^3} = t \end{cases} \iff \begin{cases} t \ge 0 & (1) \\ 4 - 2t^2 - t^3 = t^2 & (2) \end{cases}$$

Оценим левую и правую части уравнения (2).

$-2 \le -2t^2 \le 0$; $\quad -1 \le -t^3 \le 0$. Почленно сложив эти два неравенства одинакового смысла, получим: $-3 \le -2t^2 - t^3 \le 0 \iff 1 \le 4 - 2t^2 - t^3 \le 4$. Итак, значения левой части уравнения (2) представляется множеством $[1;4]$.

Множество значений правой части уравнения (2): $[0;1]$.

Единственный общий элемент полученных двух множеств -- число 1. А это значит, что исходное уравнение равносильно уравнению $\sin x = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \mid n \in Z$.

б) Решим двойное неравенство $\frac{73\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + 2\pi n \le 41\pi$ относительно целых n.

$$\frac{73}{2} < \frac{1}{2} + 2n \le 41 \iff 73 < 1 + 4n \le 82 \iff 72 < 4n \le 81 \iff 18 < n \le 20{,}25 \iff \left[\begin{array}{l} n = 19 \\ n = 20 \end{array}\right.$$

При $n = 19$ $x_1 = \frac{\pi}{2} + 38\pi = \frac{77\pi}{2}$; при $n = 20$ $x_2 = \frac{\pi}{2} + 40\pi = \frac{81\pi}{2}$.

О т в е т: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \mid n \in Z$; б) $\frac{77\pi}{2}; \frac{81\pi}{2}$.