19. На окружности некоторым образом расставили натуральные числа от 4 до 30 (каждое число по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего.

а) Могли ли все полученные разности быть не меньше 14?

б) Могли ли все полученные разности быть не меньше 13?

в) Помимо полученных разностей, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого наибольшего целого числа k можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше k?

Решение.

а) Не могли, так как у числа 17 не найдется соседей, удовлетворяющих условию задачи.

б) Могли, пример: 4, 18, 5, 19, 6, 20, 7, 21, 8, 22, 9, 23, 10, 24, 11, 25, 12, 26, 13, 27, 14, 28, 15, 29, 16, 30, 17 (начиная с 4, по часовой стрелке).

в) Пример расстановки при $k = 8$: 4, 13, 22, 5, 14, 23, 6, 15, 24, 7, 16, 25, 8, 17, 26, 9, 18, 27, 10, 19, 28, 11, 20, 29, 12, 21, 30 (начиная с 4, по часовой стрелке).

Оценка. Докажем, что при любой расстановке найдутся два числа, стоящие рядом или через одно, разность между которыми не больше 8. Предположим противное, то есть что $k \geq 9$. Тогда числа от 4 до 12 не могут стоять рядом или через одно. Значит, они стоят через 2 (если пронумеровать точки с цифрами на окружности от 1 до 27, то на местах с номерами: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25), все равно в каком порядке. Число 13 попадет в какой-то сектор между точками с указанными номерами. Поэтому 13 будет стоять рядом или через одно с каким-то из чисел от 5 до 12, разность с которым будет не больше 8. Противоречие.

Ответ: а) нет; б) да; в) 8.