18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\left|1-\frac{|x|}{2}\right|=1$$

имеет ровно два различных корня.

Решение. Заметим, что, если уравнение имеет корни, то они удовлетворяют условию $|x|>1$, и если положить $|x|=\operatorname{cosec} t$, где $t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, то единственному значению t соответствует ровно два различных значения x. Переформулируем условие задачи: *найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение*

$$a\cos t+\left|1-\frac{1}{2\sin t}\right|=1$$

имеет единственный корень на интервале $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.[1]

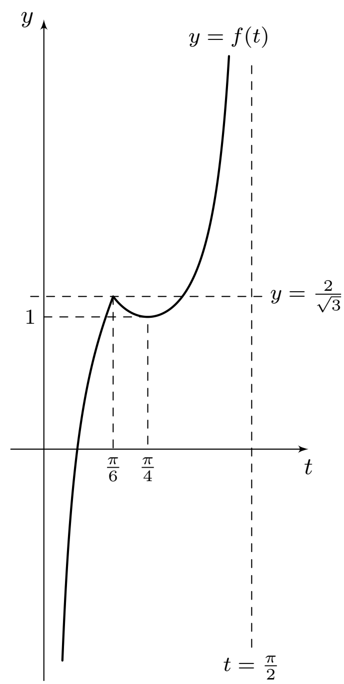
Перепишем последнее уравнение в виде

$$\frac{2\sin t-|2\sin t-1|}{\sin 2t}=a$$

и рассмотрим функцию

$$f(t)=\begin{cases}\frac{4\sin t-1}{\sin 2t}, & \text{при } t\in\left(0;\frac{\pi}{6}\right)\\ \frac{1}{\sin 2t}, & \text{при } t\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

Выясним, при каких a уравнение $f(t)=a$ имеет единственное решение. Для этого сделаем эскиз графика функции $f(t)$.



На $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$ функция $f(t)$ возрастает, так как ее производная

$$f'(t)=\frac{8\sin^3 t-4\sin^2 t+2}{\sin^2 2t}$$

положительна на этом множестве, причем $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$. На $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right)$ производная

$$f'(t)=-\frac{2\cos 2t}{\sin^2 2t}$$

обращается в нуль в точке $t=\frac{\pi}{4}$, являющейся точкой минимума, поэтому функция $f(t)$ убывает при $t\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$, причем $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, а далее возрастает. Очевидно, $\lim\limits_{t\to 0+}f(t)=-\infty$, $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}-}f(t)=+\infty$.

Итак, уравнение $f(t)=a$ будет иметь единственный корень лишь при $a\in(-\infty;1)\cup\left(\frac{2}{\sqrt{3}};+\infty\right)$.

Ответ: $(-\infty;1)\cup\left(\frac{2}{\sqrt{3}};+\infty\right)$.