18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\left|1-\frac{|x|}{2}\right|=1$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

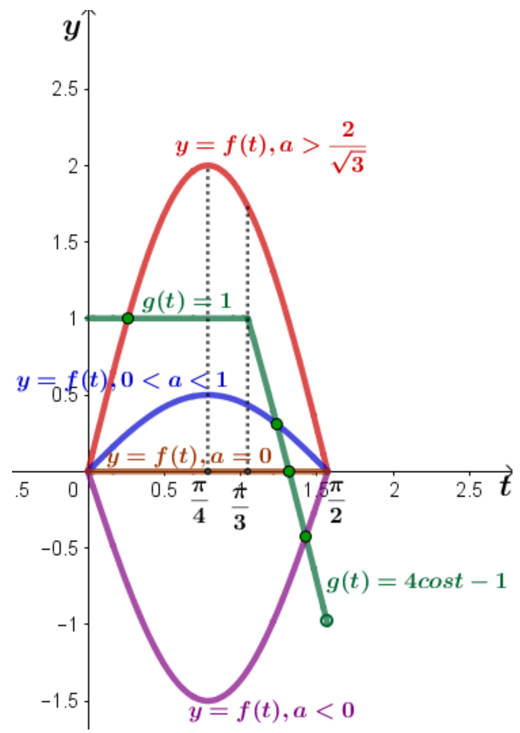
Найдем допустимые значения x : $1-\frac{1}{x^2}\geq 0;\ \frac{x^2-1}{x^2}\geq 0;\ \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}\geq 0$, откуда $|x|\geq 1$.

Тогда $0<\frac{1}{|x|}\leq 1$. Пусть $\frac{1}{|x|}=cost, t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$. Уравнение примет вид: $a\sqrt{1-\cos^2 t}+\left|1-\frac{1}{2cost}\right|=1;$

$asint+\frac{|2cost-1|}{2cost}=1;\ asin2t=2cost-|2cost-1|(*)$. Каждому значению $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ соответствуют два противоположных значения x и данное уравнение будет иметь ровно два различных корня, если уравнение $(*)$будет иметь один положительный корень.

Пусть $f(t)=asin2t, g(t)=2cost-|2cost-1|=\begin{cases}1, \text{если } cost\geq\frac{1}{2}, \text{т. е. } t\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right]\\ 4cost-1, \text{если } 0<cost<\frac{1}{2}, \text{т. е. } t\in\left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$

Функции $f(t)$ и $g(t)$непрерывны . График функции $g(t)$изображен зеленым цветом. Уравнение$(*)$будет иметь одно решение, если графики функций $y=f(t)$и $y=g(t)$ будут иметь только одну общую точку.



1)При любом $a<0$ графики функций $f(t)$(фиолетовая линия)и $g(t)$ имеют одну общую точку , следовательно, $\boldsymbol{a<0}$ подходит.

2)При $a=0$ $f(t)=0$ и графики так же имеют только одну общую точку . Следовательно, $\boldsymbol{a=0}$ — подходит.

3)Пусть $a>0$. Графики функций $y=f(t)$и $y=g(t)$ будут иметь только одну общую точку, если: а)$f\left(\frac{\pi}{3}\right)>1$, т. е. $asin\frac{2\pi}{3}>1, \frac{a\sqrt{3}}{2}>1$ откуда $\boldsymbol{a>\frac{2}{\sqrt{3}}}$; б)$f\left(\frac{\pi}{4}\right)<1$, т. е. $asin\frac{\pi}{2}<1$, откуда $\boldsymbol{a<1}$.

Следовательно, условию задачи удовлетворяют значения $a\in(-\infty;1)\cup\left(\frac{2}{\sqrt{3}};+\infty\right)$.

Ответ: $(-\infty;\mathbf{1})\cup\left(\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{3}}};+\infty\right)$