18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\left|1-\frac{|x|}{2}\right|=1$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Уравнение симметрично относительно знака переменной x, так как $(-x)^2=x^2$ и $|-x|=|x|$ $\Rightarrow$ если x_0 — корень уравнения, то и $(-x_0)$ также будет корнем этого уравнения. Так как $x\neq 0$, то условие задачи выполняется, если при $\boldsymbol{x>0}$ уравнение имеет ровно **1** корень.

При $x>0$: $|x|=x$, уравнение примет вид: $a\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\left|1-\frac{x}{2}\right|=1 \;\Leftrightarrow\; \frac{a\sqrt{x^2-1}}{x}=1-\left|1-\frac{x}{2}\right|$ $(*)$.

Уравнение $(*)$ решим графически в плоскости xOy.

1) Пусть $f(x)=1-\left|1-\frac{x}{2}\right|=\begin{cases}\frac{x}{2}, & \text{если } 0<x\le 2,\\ 2-\frac{x}{2}, & \text{если } x>2.\end{cases}$ Графиком функции $f(x)$ является объединение отрезка OA (с открытым концом $O(0;0)$) и луча AB; $A(2;1), B(4;0)$.

(2) Пусть $g(x)=\frac{a\sqrt{x^2-1}}{x}$, $D(g)$: $\begin{cases}x^2-1\ge 0,\\ x>0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2\ge 1,\\ x>0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x|\ge 1,\\ x>0;\end{cases}$, $x\ge 1$.

При $a=0$ графиком функции $g(x)$ является луч CB, $C(1;0)$, который имеет с графиком функции $f(x)$ единственную общую точку B $\Rightarrow$ уравнение $(*)$ имеет единственный корень при $x>0$; условие задачи выполнено.

Пусть $a\neq 0$.

$$g'(x)=a\,\frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-\sqrt{x^2-1}}{x^2}=\frac{a}{x^2\sqrt{x^2-1}} \;\Rightarrow$$

при $a>0$ функция $g(x)$ монотонно возрастает;
при $a<0$ функция $g(x)$ монотонно убывает.

$g(x)=0$ при $x=1$.

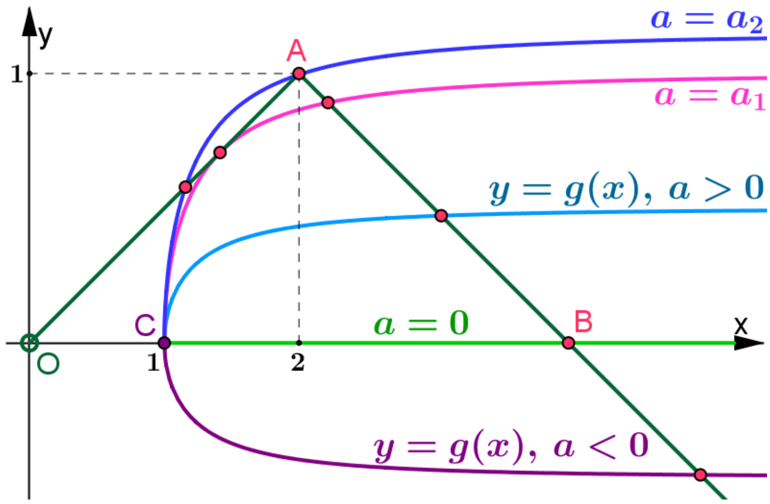
При $a<0$ $g(x)<0$ при $x>1$; графики функций $f(x)$ и $g(x)$ пересекаются в одной точке ($\in$ лучу AB) $\Rightarrow$ уравнение $(*)$ имеет единственный корень при $x>0$; условие задачи выполнено.

При $a>0$ $g(x)>0$ при $x>1$; количество точек пересечения графиков зависит от a:

при $\left[\begin{array}{l}0<a<a_1\\ a>a_2\end{array}\right.$ ровно 1 точка;

при $\left[\begin{array}{l}a=a_1\\ a=a_2\end{array}\right.$ 2 точки;

при $a_1<a<a_2$ 3 точки;



Значение a_1 найдём из условия касания прямой $y=\frac{x}{2}$ с графиком функции $f(x)$ на промежутке $(0;2]$:

$$\begin{cases}g(x)=y(x),\\ g'(x)=y'(x);\end{cases} \;\begin{cases}\frac{a\sqrt{x^2-1}}{x}=\frac{x}{2},\\ \frac{a}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{2};\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a\sqrt{x^2-1}=x^2,\\ 2a=x^2\sqrt{x^2-1};\end{cases}$$

разделим (1) уравнение на (2), получим:

$$\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \;\Leftrightarrow\; x^2-1=1 \;\Leftrightarrow\; x^2=2;\quad a=\frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2}=\frac{2\cdot 1}{2}=1;\quad a_1=1 \quad \left(x=\sqrt{2}\in(0;2]\right).$$

Значение a_2 найдём из условия, что функция $f(x)$ проходит через точку $A(2;1)$:

$\frac{a\sqrt{4-1}}{2}=1$, $a_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Условие задачи выполняется при $a\in(0;1)\cup\left(\frac{2\sqrt{3}}{3};\,+\infty\right)$.

В ответ объединим все полученные значения.

Ответ: $a\in(-\infty;1)\cup\left(\frac{2\sqrt{3}}{3};\,+\infty\right)$.