15. Решите неравенство $x\log_8\left(\frac{x}{5}-1\right)\geq 3\log_2\left(\frac{x}{5}-1\right)$

Решение.

Перепишем неравенство в виде:

$$x\log_{2^3}\left(\frac{x}{5}-1\right)\geq 3\log_2\left(\frac{x}{5}-1\right) \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{3}\log_2\left(\frac{x}{5}-1\right)-3\log_2\left(\frac{x}{5}-1\right)\geq 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \log_2\left(\frac{x}{5}-1\right)\left(\frac{x}{3}-3\right)\geq 0 \;\Leftrightarrow\; \log_2\frac{x-5}{5}\cdot(x-9)\geq 0.$$

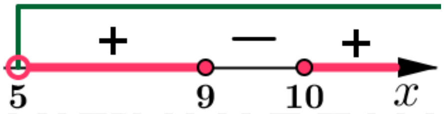
Пусть $y(x)=\log_2\frac{x-5}{5}\cdot(x-9)$; $D(y)$: $\frac{x-5}{5}>0 \;\Leftrightarrow\; x-5>0 \;\Leftrightarrow\; x>5$.

Нули функции: $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\log_2\frac{x-5}{5}=0,\\ x-9=0,\end{array}\right.\\ x>5;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\frac{x-5}{5}=1,\\ x=9,\end{array}\right.\\ x>5;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=10,\\ x=9,\end{array}\right.\\ x>5;\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=10,\\ x=9.\end{array}\right.$

Промежутки знакопостоянства функции:

$y(6)>0$, $y(9{,}5)<0$, $y(15)>0$.

$y(x)\geq 0$ при $x\in(5;9]\cup[10;+\infty)$.



Ответ: $(5;9]\cup[10;+\infty)$.