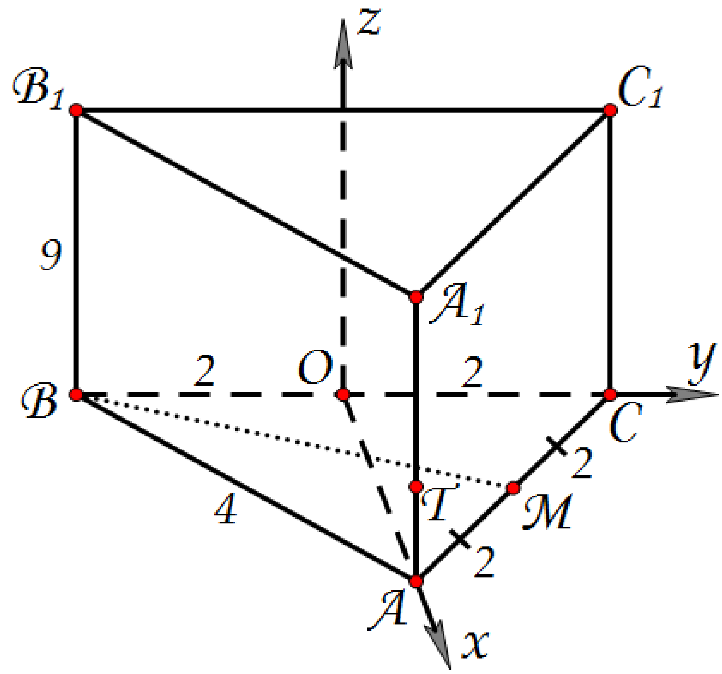
Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой сторона основания $AB = 4$, а боковое ребро $AA_1 = 9$, точка M – середина ребра AC, а на ребре AA_1 взята точка T так, что $AT = 3$.

а) Докажите, что плоскость BB_1M делит отрезок C_1T пополам.

б) Плоскость BTC_1 делит отрезок MB_1 на две части. Найти длину большей из них.

Р е ш е н и е:



а) Задачу рассмотрим в прямоугольной системе координат, как показано на рисунке. Имеем: $AO = 4\sqrt{3}/2 = 2\sqrt{3}$, $B(0;-2;0)$, $M(\sqrt{3};1;0)$, $T(2\sqrt{3};0;3)$.

Составим уравнение плоскости BB_1M, которую обозначим α. Заметим, что $\overrightarrow{MA} \perp \alpha$, значит, $\overrightarrow{MA}$ – нормаль плоскости α, проходящая через точку M. $\overrightarrow{MA}\left\{\sqrt{3};-1;0\right\}$. Уравнение $\alpha:\ \sqrt{3}(x-x_M)-1\cdot(y-y_M)+0\cdot(z-0)=0$, т.е. $\sqrt{3}(x-\sqrt{3})-(y-1)=0$; $\sqrt{3}x-y-2=0$.

Пусть D – середина отрезка C_1T. Тогда: $x_D = \dfrac{x_C + x_T}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, аналогично найдем: $y_D = 1$, $z_D = 6$. $D(\sqrt{3};1;6)$. Подставим координаты D в уравнение плоскости α. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-1-2=0 \iff 0=0$. Значит, $D \in \alpha$. Заметим, что $T \notin \alpha$. Это значит, что прямая C_1T и плоскость α других общих точек, кроме точки D, не имеют.

Вывод: плоскость BB_1M делит отрезок C_1T пополам.

б) Найдем уравнение плоскости BTC_1. Плоскость обозначим β.

$$\begin{pmatrix} B \\ T \\ C_1 \end{pmatrix}:\begin{cases} -2b=d \\ 2\sqrt{3}a+3c=d \\ 2b+9c=d \end{cases}:\begin{cases} \sqrt{3}a+b=d \\ -2b=d \\ -2b+9c=d \end{cases}.\ b=-\frac{d}{2};\ -d+9c=d;\ c=\frac{2d}{9}.\quad 2\sqrt{3}+3c=d;$$

$$2\sqrt{3}a+\frac{6d}{9}=d;\ a=\frac{d}{6\sqrt{3}}.$$ Уравнение $\beta:\ \dfrac{1}{6\sqrt{3}}x-\dfrac{1}{2}y+\dfrac{2}{9}z=1 \iff \sqrt{3}x-9y+4z-18=0.$

Составим уравнение прямой $MB_1:\ \dfrac{x-x_{B_1}}{x_M-x_{B_1}}=\dfrac{y-y_{B_1}}{y_M-y_{B_1}}=\dfrac{z-z_{B_1}}{z_M-z_{B_1}};\quad \dfrac{x}{\sqrt{3}}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-9}{-9},$

откуда: $\begin{cases} 3x = \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} \\ -9y - 18 = 3z - 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x = y + 2 \\ y = -\dfrac{z}{3} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x = -\dfrac{z}{3} + 3 \\ 9y = -3z + 9 \end{cases}.$

Полученные значения $\sqrt{3}x$ и $9y$ подставим в уравнение β.

$-\dfrac{z}{3} + 3 + 3z - 9 + 4z - 18 = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{z}{3} + 7z - 24 = 0 \Leftrightarrow 20z = 72 \Leftrightarrow z = 18/5.$ Нами найдена аппликата общей точки отрезка MB_1 и β. Это – длина одной части проекции отрезка MB_1 на боковое ребро призмы. Длина другой части равна $9 - 18/5 = 27/5$. Проекции рассмотренных частей отрезка MB_1 находятся в отношении $27:18 = 3:2$. $\overrightarrow{MB_1}\left\{-\sqrt{3}; -3; 9\right\}$. $\left|\overrightarrow{MB_1}\right| = \sqrt{3+9+81} = \sqrt{93}$. Большая часть отрезка MB_1 равна $\dfrac{3\sqrt{93}}{3+2} = \dfrac{3\sqrt{93}}{5}$.

Ответ: б) $\dfrac{3\sqrt{93}}{5}$.