**19.** Имеется прямоугольная таблица размером MxN, заполненная числами 0 и 1, обладающая следующими свойствами. Во-первых, в каждой строке и в каждом столбце есть хотя бы один элемент, равный 1. Во-вторых, нет ни одной пары одинаковых строк, а также ни одной пары одинаковых столбцов. Таблицы, обладающие этими свойствами, назовем «хорошими». Две таблицы назовем эквивалентными в том (и только в том) случае, если из одной из них можно получить другую путем перестановки строк и/или столбцов.

а) Сколько существует различных попарно неэквивалентных «хороших» таблиц размером 2 x 3?

б) Укажите количество всех таблиц, эквивалентных «хорошей» таблице

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |

в) Какое максимальное число столбцов может быть в «хорошей» таблице, содержащей M строк?

**Решение.**

**а)** Поскольку в каждом столбце должна быть хотя бы одна единица и столбцы не могут повторяться, любая «хорошая» таблица 2x3 представляет собой перестановку столбцов следующей таблицы:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

Следовательно, все они будут эквивалентны друг другу.

**б)** Заметим, что в каждой строке и в каждом столбце исходной таблицы стоит один ноль (остальные единицы), и при любых перестановках строк и столбцов это свойство будет сохраняться. Подсчитаем, сколько существует таблиц 3x3, обладающих указанным свойством. В первом столбце ноль можно поставить на любое из трех мест; во втором столбце – на любое из двух оставшихся (столбцы не могут повторяться); в третьем столбце – на одно место. Всего получаем $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ различных таблиц. Показать, что все они эквивалентны исходной таблице, можно следующим образом (не более двух перестановок столбцов):

1) если в нижней ячейке первого столбца стоит не ноль, меняем его местами со столбцом, в котором в нижней клетке ноль;

2) если после первого шага в верхней клетке третьего столбца стоит не ноль, меняем его местами со вторым столбцом. В итоге приходим к исходной таблице.

**в)** В каждой ячейке столбца высоты $M$ может стоять любой из двух элементов: 0 или 1. Значит, всего существует $2^M$ различных столбцов. Вычтем из полученного числа вариант, когда столбец состоит из одних нулей, получим $2^M - 1$ различных столбцов, среди которых нет нулевого. Заметим, что в таблице не будет строк, состоящих из одних нулей, так как есть столбец из одних единиц.

Докажем теперь, что у построенной таблицы нет одинаковых строк при любом способе чередования столбцов (все остальные условия «хороших» таблиц выполняются). Выделим из таблицы $M$ столбцов, в которых один ноль, а остальные – единицы, и составим из них таблицу $M$ x $M$. В построенной таким образом таблице любые две строки будут отличаться друг от друга, поскольку в них на разных местах стоят нули. Следовательно, и в исходной таблице нет одинаковых строк.

**Ответ:** а) 1; б) 6; в) $2^M - 1$.