

18. Найдите все значения параметра p , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 18px + 77p^2 \leq 0, \\ (x - 324)^2 \geq (29p)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} (x + 7p)(x + 11p) \leq 0, \\ (x - 324 - 29p)(x - 324 + 29p) \geq 0. \end{cases}$$

Тогда при $p = 0$ система имеет единственное решение $x = 0$.

Если $p < 0$, то решением первого неравенства будет отрезок $[-7p; -11p]$, а второго — объединение лучей $(-\infty; 324 + 29p]$, $[324 - 29p; +\infty)$. В таком случае система будет иметь единственное решение, если $-7p = 324 + 29p$, $-11p < 324 - 29p$ или $-11p = 324 - 29p$, $-7p > 324 + 29p$. Решая эти две системы, находим $p = -9$.

Если $p > 0$, то решением первого неравенства будет отрезок $[-11p; -7p]$, а второго — объединение лучей $(-\infty; 324 - 29p]$, $[324 + 29p; +\infty)$. В этом случае система будет иметь единственное решение, если $-11p = 324 - 29p$, $-7p < 324 + 29p$ или $-7p = 324 + 29p$, $-11p > 324 - 29p$. Откуда находим $p = 18$.

Ответ: $-9; 0; 18$.