

18. Найдите все значения параметра p , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 18px + 77p^2 \leq 0 \\ (x - 324)^2 \geq (29p)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Оба неравенства системы разложим на множители:

$$\begin{cases} x^2 + 7px + 11px + 77p^2 \leq 0, \\ (x - 324)^2 - (29p)^2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x + 7p) + 11p(x + 7p) \leq 0, \\ ((x - 324 - 29p)(x - 324 + 29p)) \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 7p)(x + 11p) \leq 0, \\ (x - (324 + 29p))(x - (324 - 29p)) \geq 0; \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = -7p, \quad x_2 = -11p; \\ x_3 = 324 + 29p, \quad x_4 = 324 - 29p. \end{matrix}$$

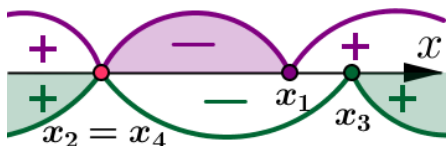
Рассмотрим 3 случая:

1) $p = 0$; система примет вид: $\begin{cases} x^2 \leq 0, \\ (x - 324)^2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$

Таким образом, при $p = 0$ условие задачи выполняется.

При $p \neq 0$: $x_1 \neq x_2, x_3 \neq x_4$. Неравенства будем решать методом интервалов. Решением первого неравенства системы будет отрезок; решением 2 – го неравенства будет объединение двух лучей.

2) $p > 0$; тогда: $-11 < -7 < 0 \Leftrightarrow -11p < -7p < 0$; $324 + 29p > 0$; $x_2 < x_1 < 0 < x_3$.

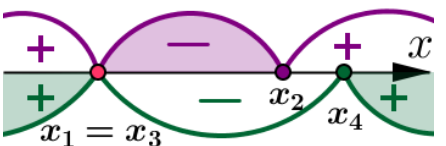


Решение каждого неравенства выделено цветом.

Система будет иметь единственное решение, если $x_2 = x_4$:

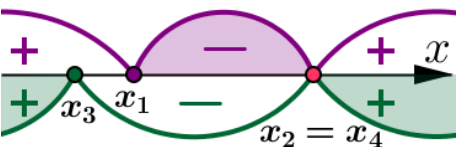
$$-11p = 324 - 29p \Leftrightarrow 18p = 324 \Leftrightarrow p = 18 \quad (18 > 0).$$

3) $p < 0$; тогда: $-11 < -7 \Leftrightarrow -11p > -7p$; $-29 < 29 \Leftrightarrow -29p > 29p \Leftrightarrow 324 - 29p > 324 + 29p$; $x_2 > x_1$; $x_4 > x_3$. Решение каждого неравенства выделено цветом. Возможны следующие случаи:



3а) Система будет иметь единственное решение, если $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_4 > x_2 \end{cases}$:

$$\begin{cases} -7p = 324 + 29p, \\ 324 - 29p > -11p, \\ p < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36p = -324, \\ 18p < 324, \\ p < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -9, \\ p < 18, \\ p < 0; \end{cases} \Leftrightarrow p = -9.$$



3б) Система будет иметь единственное решение, если $\begin{cases} x_2 = x_4 \\ x_3 < x_1 \end{cases}$;
но $x_2 = x_4$ при $p = 18$ (пункт 2), $18 < 0$ – неверно \Rightarrow этот случай невозможен.

Таким образом, условие задачи выполняется при $p \in \{-9; 0; 18\}$.

Ответ: $p \in \{-9; 0; 18\}$.