

18. Найдите все значения параметра p , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 18px + 77p^2 \leq 0 \\ (x - 324)^2 \geq (29p)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Запишем систему в виде: $\begin{cases} (x + 7p)(x + 11p) \leq 0 \\ (x - (324 - 29p))(x - (324 + 29p)) \geq 0 \end{cases} (*)$

1) При $p = 0$ система примет вид: $\begin{cases} x^2 \leq 0 \\ (x - 324)^2 \geq 0 \end{cases}$, откуда $x = 0$ – единственное решение.

Следовательно, $p = 0$ удовлетворяет условию задачи.

2) При $p > 0$ система (*) равносильна системе: $\begin{cases} -11p \leq x \leq -7p \\ \begin{cases} x \geq 324 + 29p \\ x \leq 324 - 29p \end{cases} \end{cases}$.

Так как $p > 0$, то $324 + 29p > 0$, а $-7p < 0$ и полученная система будет иметь единственное решение, если $-11p = 324 - 29p$, откуда $18p = 324$; $p = 18$.

3) При $p < 0$ система (*) равносильна системе: $\begin{cases} -7p \leq x \leq -11p \\ \begin{cases} x \geq 324 - 29p \\ x \leq 324 + 29p \end{cases} \end{cases}$.

Так как $p < 0$, то $-11p < 324 - 29p$ и полученная система будет иметь единственное решение, если $-7p = 324 + 29p$, откуда $36p = -324$; $p = -9$.

Ответ: $-9; 0; 18$.