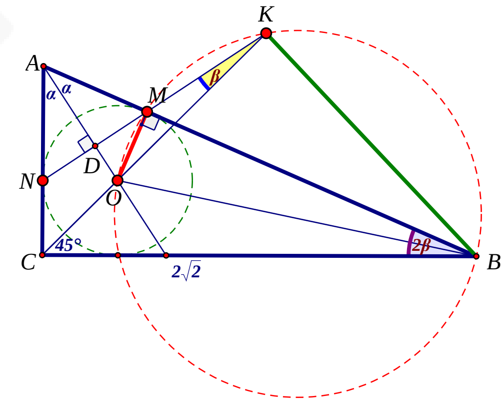
16. Окружность с центром О, вписанная в прямоугольный треугольник АВС, касается гипотенузы АВ в точке М, а катета АС – в точке N, АС<ВС. Прямые MN и СО пересекаются в точке К.

а) Докажите, что угол СKN в два раза меньше угла АВС

б) Найдите ВК, если $BC = 2\sqrt{2}$



Решение.

а) $AN = AM$ по свойству касательных; AO – биссектриса $\angle BAC = 2\alpha$

$\Rightarrow$ по свойству равнобедренного треугольника $AD \perp MN$; $\angle CNK$ – внешний угол ΔAND и $\angle CNK = 90° + \alpha$; $\angle NCK = \angle OCB = 45°$, т. к. CO – биссектриса прямого угла и $\angle CKN = 180° - (90° + \alpha + 45°) = 45° - \alpha$.

$\angle ABC = 90° - 2\alpha = 2(45° - \alpha) = 2\angle CKN$, т. е. $\angle CKN = \frac{1}{2}\angle ABC$.

б) Пусть $\angle ABC = 2\beta$, тогда $\angle CKN = \beta = \angle MBO$, т. к. BO – биссектриса $\angle ABC$.

Отрезок OM виден из точек B и K под углом $\beta \Rightarrow$ точки B, O, M, K лежат на одной окружности.

$\angle CKB = \angle OMB$ как вписанные; $OM \perp AB \Rightarrow \angle CKB = 90°$ и ΔCKB – прямоугольный, равнобедренный. Тогда $BK = BC \cdot \sin 45° = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$.

Ответ: **2**.