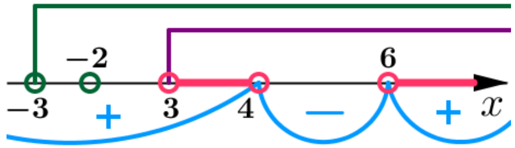
15. Решите неравенство $\log_{(x+3)}(2(x^2-10x+24)) \ge \log_{(x+3)}(x^2-9)$

Решение.

ОДЗ:

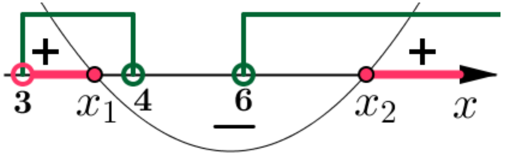
$$\begin{cases} x+3>0, \\ x+3\ne 1, \\ x^2-10x+24>0, \\ (x-3)(x+3)>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3, \\ x\ne -2, \\ (x-4)(x-6)>0, \\ x>3; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3<x<4, \\ x>6. \end{array}\right.$$



Так как $x>3 \Leftrightarrow x+3>6 \Rightarrow x+3>1$, на ОДЗ неравенство равносильно:
(функция $y=\log_a t$ – возрастающая при $a>1$)

$$2(x^2-10x+24)\ge x^2-9 \Leftrightarrow 2x^2-20x+48-x^2+9\ge 0 \Leftrightarrow x^2-20x+57\ge 0$$

Пусть $y(x)=x^2-20x+57$, графиком является парабола, ветви направлены вверх; $x_{1;2}=10\pm\sqrt{43}$;
$6<\sqrt{43}<7 \Leftrightarrow -7<-\sqrt{43}<-6 \Leftrightarrow 3<10-\sqrt{43}<4.$



С учётом ОДЗ: $x\in\left(3;\ 10-\sqrt{43}\right]\cup\left[10+\sqrt{43};\ +\infty\right).$

Ответ: $\left(3;\ 10-\sqrt{43}\right]\cup\left[10+\sqrt{43};\ +\infty\right).$