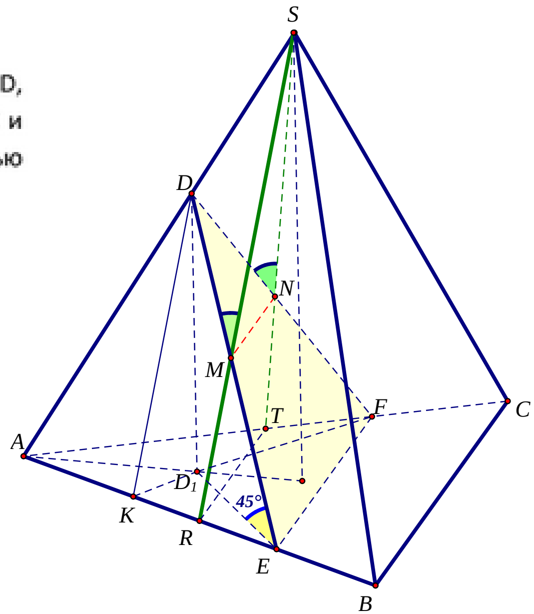
№14 вариант 318.

14. На боковом ребре SA правильной треугольной пирамиды SABC взята точка D, через которую проведено сечение пирамиды, пересекающее апофемы граней SAC и SAB в точках M и N. Известно, что прямые DM и DN образуют углы β с плоскостью основания пирамиды, а величины углов DMS и DNS равны α, $\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

а) Докажите, что секущая плоскость параллельна ребру BC

б) Найдите угол MDN, если $\alpha = 30^0, \beta = 45^0$



Решение.

а)$\angle DSM = \angle DSN, \angle DMS = \angle DNS \Rightarrow \angle SDM = \angle SDN$ и $\Delta SDM = \Delta SDN$ по второму признаку. Тогда $DM = DN$.

ΔRST − равнобедренный, $DM = DN \Rightarrow MN \parallel RT$; RT − средняя линия ΔABC, $RT \parallel BC \Rightarrow MN \parallel BC$. $MN \subset (DEF) \Rightarrow BC \parallel (DEF)$.

б)$(DEF) \cap (ABC) = EF \parallel BC \Rightarrow AE = AF$,$\Delta DAE = \Delta DAF$ и $DE = DF$; D_1E − проекция DE и $\angle DED_1 = 45°$. Тогда $DD_1 = D_1E = x, DE = DF = x\sqrt{2}$. Проведем $DK \parallel SR$. $\angle KDM = \angle DMS = 30°$ − накрест лежащие и $KE = \frac{1}{2}DE = \frac{x\sqrt{2}}{2}, DK = DE\cos 30° = \frac{x\sqrt{6}}{2}$. Тогда $KD_1 = \sqrt{DK^2 - DD_1^2} =$

$$= \sqrt{\frac{6x^2}{4} - x^2} = \frac{x\sqrt{2}}{2} = KE \Rightarrow \angle KED_1 = 45°, \text{а } \angle D_1EF = 60° - 45° = 15°.$$

В $\Delta\ ED_1F\ \angle ED_1F = 150°$ и по т. косинусов $EF^2 = x^2 + x^2 - 2x^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x^2(2 + \sqrt{3})$.

По т. косинусов для ΔDEF $\cos\angle MDN = \frac{DE^2 + DF^2 - EF^2}{2DE \cdot DF} = \frac{2x^2 + 2x^2 - x^2(2+\sqrt{3})}{2 \cdot 2x^2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$ и

$\angle MDN = \arccos\frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: $\mathbf{\arccos\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$.