19. Натуральное число А таково, что, если его первую цифру переставить на последнее место, получится число, в $n > 1$ раз меньшее числа А ($n \in N$).

а) Существует ли двухзначное число А, удовлетворяющее указанным условиям?

б) Найдите наименьшее число А, удовлетворяющее указанным условиям, если $n = 5$, а число А начинается с цифры 7.

в) Приведите пример числа, которое при перестановке его первой цифры на последнее место увеличивается в 3 раза.

Решение.

а) Пусть $A = 10a + b$, где a и b – цифры, не равные нулю*****. Тогда
$10a + b = n(10b + a) \Longrightarrow a(10 - n) = b(10n - 1).$ (1)
Так как $b > 0,\ 1 < n < 10$. Множитель $(10n - 1)$ в правой части (1) – двузначное число, оканчивающееся на 9.
Если $10n - 1 = 49,$ то $n = 5.$ Тогда $10 - n = 5,$ и равенство (1) невозможно, поскольку a не может делиться на 49.
Из семи остальных возможных значений множителя $(10n - 1)$ пять (19, 29, 59, 79, 89) – простые числа, еще два (39 = 13 · 3, 69 = 23 · 3) имеют простые двузначные делители. Значит, левая часть равенства (1), представляющая собой произведение двух однозначных чисел, должна иметь простой двузначный делитель, что невозможно.

б) Пусть $A = 7 \cdot 10^k + B$, где B – k-значное число. Тогда $7 \cdot 10^k + B = 5(10B + 7) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow 7 \cdot 10^k - 35 = 49B$. После сокращения на 7 получим: $10^k - 5 = 7B.$ (2)
Очевидно, что чем меньшие значения k и B в равенстве (2), тем меньшим будет A, что и требуется в задании. Будем последовательно перебирать значения k в равенстве (2) до тех пор, пока B не будет целым, получим: $k = 5,\ B = 14285 \ \Rightarrow A = 714285.$

в) Пусть $A = a \cdot 10^k + B \Longrightarrow\ 3(a \cdot 10^k + B) = 10B + a \ \Longrightarrow a(3 \cdot 10^k - 1) = 7B,$ (3)
где B – k-значное число. Правая часть (3) делится на 7, значит, должна делиться и левая. При $a = 7$ равенство (3) выполняться не может, так как B – k-значное число, а
$(3 \cdot 10^k - 1)$ – (k + 1)-значное. Поэтому на 7 должно делиться выражение в скобках. Перебирая значения k до тех пор, пока $(3 \cdot 10^k - 1)$ не будет делиться на 7, получим:
$k = 5,\ B = a \cdot 42857.$ При $a = 1,\ B = 42857,\ A = 142857.$

Ответ: а) нет; б) 714285; в) 142857.

Замечание.

Ответы в пунктах б) и в) состоят из одних и тех же цифр. Это не случайность, а свойство ***кругового числа*** 142857. Если его умножить на числа: 2, 3, 4, 5, 6, – то полученные произведения будут состоять из тех же цифр, что и само число, только переставленных в круговом порядке:
2 · 142857 = 285714; 3 · 142857 = 428571; 4 · 142857 = 571428; 5 · 142857 = 714285;
6 · 142857 = 857142.
Приведенное решение иллюстрируется вторым и четвертым равенствами. Если бы мы взяли в пункте в) $a = 2$, то получили бы $A = 285714$, а выполнение условий задания следовало бы из первого и пятого равенств.

***)** В решении задания а) предполагается, что число, полученное после перестановки цифр, двузначное. Иначе, если $b = 0$, в качестве А подойдет любое из чисел: 20, 30, **...**, 90.