18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a(x+2)+y=3a \\ a+2x^3=y^3+(a+2)x^3 \end{cases}$$

имеет не более двух решений.

Решение.

Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые, система примет вид:

$$\begin{cases} ax+2a+y=3a, \\ a+2x^3=y^3+ax^3+2x^3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=a(1-x), \\ a=a^3(1-x)^3+ax^3 \ \ (1). \end{cases}$$

Зависимость y от x линейная $\Rightarrow$ каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y; тогда количество решений системы определяется количеством различных корней уравнения (1).

Если $a=0$, уравнение (1) примет вид: $0=0$, верно при $\forall x$; уравнение (а, значит, и исходная система) имеет бесконечное множество решений, т. е. условие задачи не выполняется.

Если $a\neq 0$, разделим обе части уравнения (1)на a, уравнение примет вид:

$$a^2(1-x)^3+x^3=1 \ \Leftrightarrow \ a^2(1-x)^3-(1-x^3)=0 \ \Leftrightarrow \ a^2(1-x)^3-(1-x)(1+x+x^2)=0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ (1-x)(a^2-2a^2x+a^2x^2-1-x-x^2)=0 \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} x=1, \\ x^2(a^2-1)-x(2a^2+1)+a^2-1=0 \ \ (2). \end{cases}$$

Таким образом, уравнение (1) при $\forall a\neq 0$ имеет корень $x=1$; тогда условие задачи выполняется только в том случае, если уравнение (2) имеет не более одного корня, отличного от $x=1$. Рассмотрим следующие случаи:

1) если $a^2-1=0 \ \Leftrightarrow \ a=\pm 1$, уравнение (2) линейное; примет вид: $3x=0 \ \Leftrightarrow \ x=0$; условие задачи выполнено (исходная система при этом имеет 2 решения).

2) если $a\neq\pm 1$, уравнение (2) квадратное; найдём его дискриминант:
$D=(2a^2+1)^2-4(a^2-1)^2=(2a^2+1-2a^2+2)(2a^2+1+2a^2-2)=3(2a-1)(2a+1)$.
Найдём значения а, при которых $x=1$ является корнем уравнения (2), т. е. исследуем, возможно ли совпадение корней квадратного уравнения с $x=1$:
$a^2-1-2a^2-1+a^2-1=0 \ \Leftrightarrow \ -3=0$, неверно $\Rightarrow$ таких а нет; тогда условие задачи выполняется, только если квадратное уравнение не имеет корней или имеет единственный корень, т. е. $D\leq 0$: $3(2a-1)(2a+1)\leq 0 \ \Leftrightarrow \ (a-0{,}5)(a+0{,}5)\leq 0 \ \Leftrightarrow \ -0{,}5\leq a\leq 0{,}5.$

Таким образом, система имеет не более двух решений при $a\in[-0{,}5;0)\cup(0;0{,}5)\cup\{-1;1\}$.

Ответ: $a\in[-0{,}5;0)\cup(0;0{,}5]\cup\{-1;1\}$.