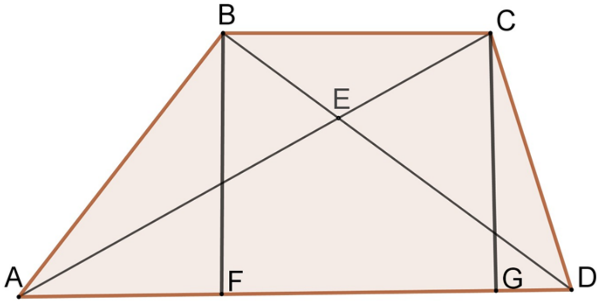
16. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E – точка пересечения диагоналей Известно, что площадь каждого из треугольников ABE и DCE равна 1.
а) Докажите, что $ABCD$ – трапеция или параллелограмм.
б) Найдите BC, если площадь всего четырехугольника не превосходит 4 и $AD = 3$.



Решение.

а) Так как площади треугольников ABE и DCE равны, $S_{ABD} = S_{ABE} + S_{AED} = S_{DCE} + S_{AED} = S_{ACD}$. Значит, высоты BF и CG треугольников ABD и ACD также равны (основание AD – общее). Точки B и C равноудалены от $AD \Rightarrow BC \parallel AD$ и $ABCD$ – трапеция или параллелограмм.

б) По известному свойству $S_{BEC} \cdot S_{AED} = S_{ABE} \cdot S_{DCE} = 1$. Обозначим $S_{AED} = a \Rightarrow S_{BEC} = \dfrac{1}{a}$.

По условию $S_{ABCD} \le 4 \Rightarrow a + \dfrac{1}{a} \le 2 \Rightarrow a + \dfrac{1}{a} - 2 = \left(\sqrt{a} - \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \le 0 \Rightarrow a = \dfrac{1}{a} = 1.$

Треугольники AED и BEC подобны с коэффициентом 1, поэтому $BC = AD = 3$ ($ABCD$ – параллелограмм).

Ответ: б) 3.