13. а) Решите уравнение $\dfrac{\cos 2x \cos 8x - \cos 10x}{\cos x + 1} = 0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$

Решение.

(а) Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\cos 2x \cos 8x - \cos 10x = 0, \\ \cos x + 1 \neq 0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0{,}5 \cos 10x + 0{,}5 \cos 6x - \cos 10x = 0, \\ \cos x \neq -1,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}0{,}5\,(\cos 6x - \cos 10x) = 0, \\ \cos x \neq -1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 8x \sin 2x = 0, \\ \cos x \neq -1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin 8x = 0, \\ \sin 2x = 0,\end{array}\right. \\ \cos x \neq -1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}8x = \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ 2x = \pi l, l \in \mathbb{Z},\end{array}\right. \\ x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi k}{8}, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi l}{2}, l \in \mathbb{Z},\end{array}\right. \\ x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{\pi k}{8}, k \in \mathbb{Z}, \quad (1) \\ x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad (2)\end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi k}{8}, k \in \mathbb{Z}, k \neq 8 + 16n, n \in \mathbb{Z}.$$

(1) Подставим серию корней $x = \dfrac{\pi l}{2}, l \in \mathbb{Z}$ в первое уравнение совокупности:

$\sin\left(8 \cdot \dfrac{\pi l}{2}\right) = \sin 4\pi l = \sin 0 = 0$ при $\forall l \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ серия $x = \dfrac{\pi l}{2}, l \in \mathbb{Z}$ входит в серию $x = \dfrac{\pi k}{8}, k \in \mathbb{Z}$.

(2) Выясним, есть ли в серии $x = \dfrac{\pi k}{8}, k \in \mathbb{Z}$ недопустимые корни. Для этого решим в целых числах уравнение: $\dfrac{\pi k}{8} = \pi + 2\pi n \Leftrightarrow k = 8 + 16n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ при этих значениях k корни серий (1) и (2) совпадают.

(б) Отбор корней $\in [0;\ \pi]$ выполним с помощью двойного неравенства:

$0 \leq \dfrac{\pi k}{8} \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 8, k \in \mathbb{Z}, k \neq 8;$ $k = 0, x = 0;$ $k = 1, x = \dfrac{\pi}{8};$ $k = 2, x = \dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4};$

$k = 3, x = \dfrac{3\pi}{8};$ $k = 4, x = \dfrac{4\pi}{8} = \dfrac{\pi}{2};$ $k = 5, x = \dfrac{5\pi}{8};$ $k = 6, x = \dfrac{6\pi}{8} = \dfrac{3\pi}{4};$ $k = 7, x = \dfrac{7\pi}{8}.$

Ответ: (а) $\dfrac{\pi k}{8}, k \in \mathbb{Z}, k \neq 8 + 16n, n \in \mathbb{Z}$. (б) $0; \dfrac{\pi}{8}; \dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{8}; \dfrac{\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{8}; \dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{8}$.