Решение

На каждом шаге вместо двух натуральных чисел m и n мы будем получать одно $|m-n|+1$. Их разность всегда нечётная:

$$m+n-|m-n|-1=\begin{cases}2n-1, & \text{если } m \geqslant n,\\ 2m-1, & \text{если } n>m.\end{cases}$$

Поэтому, если рассматривать сумму выписанных чисел, то она после каждого шага будет менять чётность. Вначале на доске 2014 чисел, сумма которых (арифметическая прогрессия) равна 2029105, т.е. нечётная. С каждым шагом количество чисел уменьшается на единицу, и после 2013 шагов всегда останется одно чётное число. Обозначим его через K.

Так как для любых $m,n \in \mathbb{N}$ справедливо $1 \leqslant |m-n|+1 \leqslant \max\{m,\ n\}$, то получим

$$2 \leqslant K \leqslant 2014.$$

а) $K_{min}=2$. Разобьём числа на пары: 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6, ..., 2013 и 2014. Каждая пара перейдёт в двойку, которых будет 1007 штук. Одну оставим, а остальные разобьём на пары, которые перейдут в 503 единицы. Любая пара из единиц порождает опять единицу. Поэтому процесс можно довести до состояния, когда останется 1 и 2, которые и дадут на выходе 2. Схематично это можно изобразить примерно так:

$$\underbrace{1,2}_{\downarrow},\ \underbrace{3,4}_{\downarrow},\ \underbrace{5,6}_{\downarrow},\ \underbrace{7,8}_{\downarrow},\ \ldots,\ \underbrace{2013,2014}_{\downarrow}$$
$$\underbrace{2,\ 2}_{\downarrow},\ \underbrace{2,\ 2}_{\downarrow},\ \ldots,\ 2$$
$$\underbrace{1,\qquad 1}_{\downarrow},\ \ldots,\ 2$$
$$1,\ \ldots,\ 2$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$\underbrace{1,2}_{\downarrow}$$
$$2$$

б) $K_{max}=2014$. Оставим первое и последнее числа, а остальные разобьём на пары: 2 и 3, 4 и 5, 6 и 7, ..., 2012 и 2013, которые дадут 1006 двоек. Двойки переводим в 503 единицы, затем из 504 единиц (с учётом самой первой) оставляем одну и, наконец, пара 1 и 2014 даст на выходе 2014.

с форума alexlarin.com

Ответ: **а)** 2; **б)** 2014.

mathlesson.ru