

Решение.

Пусть в городе A приняли участие n ($n \geq 2$) учителей, а средний балл составил x ($x \in \mathbb{N}$). Тогда в городе B приняли участие $51 - n$ учителей, а средний балл пусть составил y ($y \in \mathbb{N}$).

а) Предположим, что после переезда одного из учителей средний балл в городе A вырос в два раза, т. е. составил $2x$. Тогда переехавший учитель набрал $nx - 2(n - 1)x = (2 - n)x \leq 0$ баллов. Получили противоречие с тем, что каждый учитель набрал целое положительное количество баллов.

б) Пусть переехавший учитель набрал m баллов. Тогда

$$m = nx - 1,1(n - 1)x = 1,1(52 - n)y - (51 - n)y,$$

или $10m = (11 - n)x = (62 - n)y$. Если предположить, что $y = 1$, то $10m + n = 62$, откуда с учетом условия $11 - n \geq 0$ получаем $m = 6$, $n = 2$. Но в этом случае $60 = 9x$. Получили противоречие с тем, что $x \in \mathbb{N}$.

в) Предположим, что $y = 2$. Тогда аналогично пункту б) получаем уравнение $5m + n = 62$, откуда $m = 12$, $n = 2$ или $m = 11$, $n = 7$. В первом случае получаем $120 = 9x$, а во втором — $110 = 4x$. Каждое из этих уравнений не разрешимо в натуральных числах.

Пусть $y = 3$. Тогда $10m + 3n = 186$, откуда $m = 18$, $n = 2$. При этом $180 = 9x$, откуда $x = 20$. Значит, наименьшее значение первоначального среднего балла в городе B составляет 3 балла и достигается, если в городе A принимали участие 2 учителя, набравшие, например, по 20 баллов, а в городе B принимали участие 49 учителей, набравшие, например, по 3 балла, а переехавший учитель набрал 18 баллов.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 3.