Пусть:

S_A – сумма баллов А, S_B – сумма баллов В,

х – количество баллов учителя, сменившего город, х > 0

k – количество учителей в А. (Всего 51 учитель по условию)

Решение:

В каждом городе хотя бы 2 учителя, значит 2 ≤ k ≤ 49 .

а) Составим уравнение из условия:

$$\frac{2S_A}{k} = \frac{S_A - x}{k-1}, \; S_A = \frac{xk}{2-k}$$

При всех возможных k, сумма баллов А либо не существует (k = 2) , либо отрицательна, пришли к противоречию.

б) Если $\frac{S_B}{51-k} = 1$, тогда $S_B = 51 - k$.

Средний балл в городе В вырос на 10%: $\frac{S_B + x}{52-k} = \frac{11}{10}$ (*), подставим S_B в уравнение и получим: 31-k =5x, число (31-k) кратно 5.

Составляем аналогичное уравнение для А:

$\frac{S_A - x}{k-1} = \frac{11S_A}{10k}$, отсюда $S_A = \frac{10kx}{11-k}$ (**), значит k < 11 и (31-k) кратно 5.

Получаем k = 6, тогда x = 5, теперь подставим в уравнение (*) k и x.

$S_B = \frac{217}{5}$, что невозможно, т.к. все баллы в сумме целые положительные.

в) Пусть $\frac{S_B}{51-k} = 2$, тогда $S_B = 2 * (51 - k)$.

Уравнение (**) сохраняется, значит все еще k < 11.

Средний балл в городе В вырос на 10%: $\frac{S_B + x}{52-k} = \frac{11*2}{10}$, подставляем S_B, в итоге получаем уравнение 62 – k = 5x, (62-k) кратно 5.

Значит k = 2 или k = 7.

Если k=2, тогда x = 12, теперь подставим в уравнение (**) k и x.

$S_A = \frac{80}{3}$, что невозможно.

Если k = 7, тогда x = 11, а $S_A = \frac{385}{2}$.

Значит первоначальное среднее в городе B не могло быть 2.

Пусть оно было 3, тогда:

$\frac{S_B}{51-k} = 3,\ S_B = 3 * (51 - k)$.

Средний балл в городе B вырос на 10%: $\frac{S_B+x}{52-k} = \frac{11*3}{10}$, подставляем S_B, в итоге получаем уравнение 3*(62 – k) = 10x, (62-k) кратно 10.

Отсюда k = 2, тогда x = 18, $S_A = \frac{10kx}{11-k} = 40$.

Значит в городе A были баллы 18 и 22,

$S_B = 3 * (51 - k)$ = 147.

Пусть в городе B было 49 человек с баллом 3.

Ответ: а) нет б) нет в) 3