а) Решите уравнение $\sin x + \cos x + \cos 2x = \frac{1}{2}\sin 4x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Р е ш е н и е:

а) $\sin x + \cos x + \cos 2x = \frac{1}{2}\sin 4x \iff \sin x + \cos x + \cos 2x - \sin 2x \cdot \cos 2x = 0 \iff$

$\iff (\sin x + \cos x) + (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)(1 - \sin 2x) = 0 \iff$

$(\sin x + \cos x)(1 + (\cos x - \sin x)(\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x)) = 0$.

Решим уравнение $\sin x + \cos x = 0$. Оно равносильно уравнению $tgx = -1$

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \mid n \in Z$. Получили часть искомых решений. Далее:

$1 + (\cos x - \sin x)(\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x) = 0 \iff 1 + (\cos x - \sin x)(\cos x - \sin x)^2 = 0 \iff$

$\iff (\cos x - \sin x)^3 = -1 \iff \cos x - \sin x = -1 \iff$

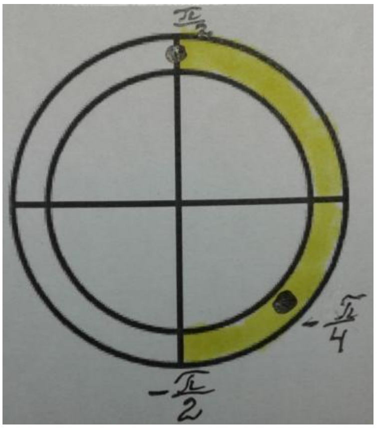
$\iff \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 0 \iff 2\cos^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0 \iff$

$$\iff 2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} \cos\frac{x}{2} = 0 \\ \cos\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{2} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in Z \\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n \mid n \in Z \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi n \mid n \in Z \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \mid n \in Z \end{array}\right.$$. Получили другую часть решений.

Все решения: $-\frac{\pi}{4} + \pi n \mid n \in Z;\ \pi + 2\pi n \mid n \in Z;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n \mid n \in Z.$

б) Отбор корней сделаем с помощью единичной окружности



$x_1 = -\frac{\pi}{4}; \quad x_2 = \frac{\pi}{2}.$

О т в е т: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n \mid n \in Z;\ \pi + 2\pi n \mid n \in Z;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n \mid n \in Z.$ б) $-\frac{\pi}{4};\quad \frac{\pi}{2}.$